

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN) (Recuperación) Mayo 2010

Problema 1 (3 puntos) Represente gráficamente el recinto limitado por las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2x^2$ y calcule su área.

(Extremadura Junio 2007)

Solución:

Estudiamos las gráficas

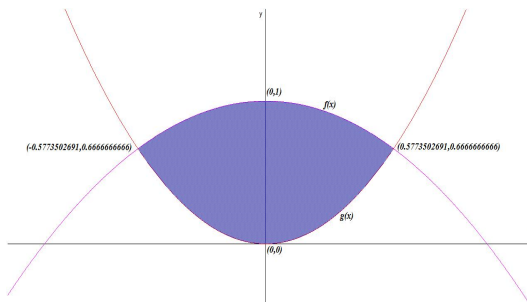
■

$$f(x) = 1 - x^2 = 0 \implies x = 1, x = -1$$

$$f'(x) = -2x = 0 \implies x = 0$$

$$f''(x) = -2 \implies f''(0) = -2 < 0 \implies (0, 1) \text{ Máximo}$$

- $g(x) = x^2$ parábola vertical con vértice en el punto $(0, 0)$ donde, claro está, hay un mínimo.
- Las dos funciones se cortan en los puntos donde $f(x) = g(x) \implies 1 - x^2 = 2x^2 \implies 1 - 3x^2 = 0 \implies x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (1 - 3x^2) dx = x - x^3$$

$$S = \left| \left[x - x^3 \right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \right| = \frac{4\sqrt{3}}{9} u^2$$

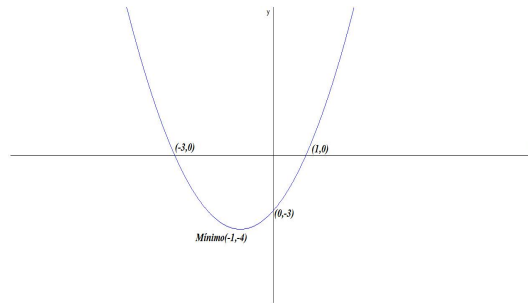
Problema 2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ se pide:

1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas

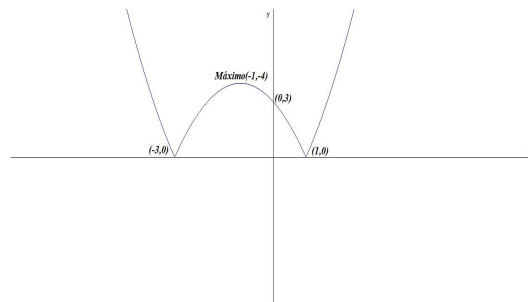
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

Solución:

1. Llamamos $g(x) = x^2 + 2x - 3$ y la representamos gráficamente:



La función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abscisas. Esta función sería:



Luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo R pero no sería derivable en los puntos $x = -3$ y $x = 1$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f .

Problema 3 (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ bx^2 - ax - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} bx^2 - ax - 1 = b - a - 1 \end{cases} \implies a = -1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ 2bx - a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = 2b - a \end{cases} \implies 3a = b$$

3.

$$\begin{cases} a = -1 \\ a = 2b \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -3x^2 + x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -6x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-11 - 1}{2} = -6.$$

Si cogemos la primera rama

$$f'(x) = -2x - 3 = -6 \implies x = 3/2$$

Si cogemos la segunda rama

$$f'(x) = -6x + 1 = -6 \implies x = 7/6$$

Los dos puntos son válidos.

Problema 4 (2 puntos) Hallar una función polinómica de tercer grado tal que tenga un extremo relativo en $(1, 1)$ y un punto de inflexión en $(0, 3)$ ¿Es $(1, 1)$ el único extremo de la función? Determinar los máximos y mínimos relativos de f .

(Islas Canarias Junio 2007)

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \implies a + b + c + d = 1 \\ f(0) = 3 \implies d = 3 \\ f'(1) = 0 \implies 3a + 2b + c = 0 \\ f''(0) = 0 \implies 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 3, \quad f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x$$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1$, si utilizamos el criterio de la segunda derivada:

$$\begin{cases} f''(1) = 6 > 0 \implies (1, 1) \text{ Mínimo} \\ f''(-1) = -6 < 0 \implies (-1, 5) \text{ Máximo} \end{cases}$$

Para los puntos de inflexión $f''(x) = 6x = 0 \implies x = 0$, para ver si se trata de un punto de inflexión recurrimos a la tercera derivada $f'''(x) = 6 \implies f'''(0) = 6 \neq 0$, por lo que el punto $(0, 3)$ es de Inflexión.