Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2009

Problema 1 (5 puntos). Se desea hallar los números naturales de tres cifras que cimplen las tres condiciones siguientes:

- La suma de las tres cifras es múltiplo de 10.
- La suma de las dos primeras cifras es igual a la tercera.
- El triple de la primera cifra es igual al doble de la segunda.

Se pide:

1. Formula un sistema de ecuaciones lineales adecuado al sistema.
2. Comprueba la compatibilidad del sistema.
3. Determine el número natural de tres cifras que verifica el enunciado propuesto

(Cantabria (junio 2008))

Solución:

1. Sea el número de tres cifras xyz

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=10m \\ x+y-z=0 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right.$$

2. $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 10m \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad |A|=-10\neq 0 \text{ siempre}$$

   Como $|A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, independientemente del valor de m.

3. Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

   En este caso Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})<$ nº de incógnitas y es un Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

Los tres planos se cortan en una recta.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=10m \\ x+y-z=0 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=2m \\ y=3m \\ z=5m \end{array}\right.$$

Con $m=1 \Longrightarrow 235$, con $m=2 \Longrightarrow$ ya no hay resultado.

Problema 2 (3 puntos).Determina el rango de la matriz

$$A=\left(\begin{array}{ccc} -1 & 2 & b \\ b & b-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

(Extremadura (junio 2008))

Solución:

$$|A|=2b^2-3b+1=0 \Longrightarrow b=1, \ \ b=\frac{1}{2}$$

- Si $b\neq 1$ y $b\neq 1/2 \Longrightarrow$Rango$(A)=3$

- Si $b=1$:
$$A=\left(\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

- Si $b=1/2$:
$$A=\left(\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Problema 3 (2 puntos). Considera las matrices

$$A=\left(\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{array}\right) \quad B=\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{array}\right)$$

1. Determina la matriz cuadrada de orden 2, tal que $MA=B$.

2. Comprueba que $M^2=I_2$ (matriz identidad de orden 2) y deduce la expresión M^n.

(Cataluña (junio 2008))

Solución:

1. $MA = B \Longrightarrow M = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ -1/4 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

2. $$M^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\begin{cases} M \text{ si } n \text{ impar} \\ I_2 \text{ si } n \text{ par} \end{cases}$$