Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2009) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere 0,3 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando un beneficio de 4 euros. Cada m^2 de panel del tipo B requiere 0,2 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas de taller de fabricación y 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m^2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución:

Sea x m^2 de tipo A.

Sea y m^2 de tipo B.

	Fabricación	Barnizado	Beneficio
A	$0,3$	$0,2$	4
B	$0,2$	$0,2$	3
Total	240	200	

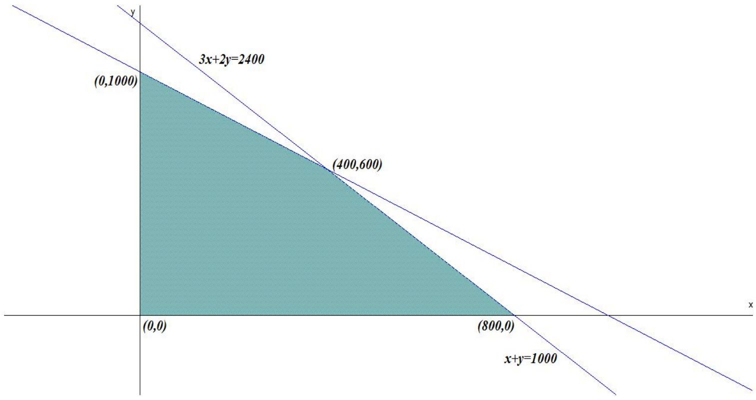
La función objetivo: $z(x, y) = 4x + 3y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 0,3x + 0,2y \le 240 \\ 0,2x + 0,2y \le 200 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x + 2y \le 2400 \\ x + y \le 1000 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} z(0, 1000) & = & 3000 \\ z(400, 600) & = & 3400 \\ z(800, 0) & = & 3200 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán vender 400 m^2 del tipo A y 600 del tipo B. El benficio de esta venta es de 3400 euros.



Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} 2x+24 & \text{si} \quad x \le -3 \\ x^2+9 & \text{si} \quad -3 < x \le 2 \\ -x+15 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

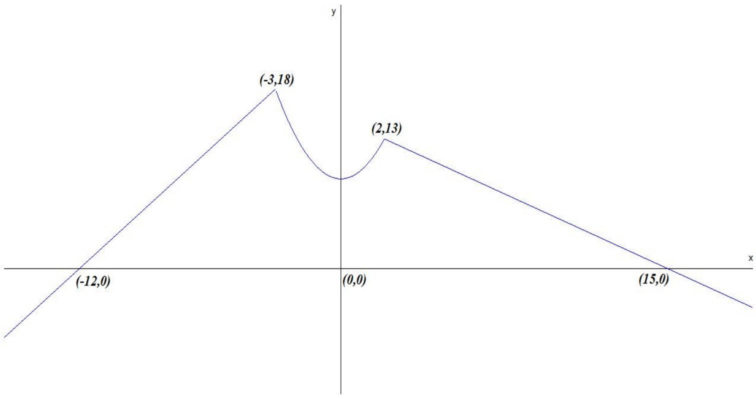
a) Represéntese gráficamente la función f.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a) La representación gráfica es:



b) En $x = 1$ la función es $f(x) = x^2+9 \Longrightarrow f'(x) = 2x$ tenemos $f(1) = 10$ y $m = f'(1) = 2 \Longrightarrow y - 10 = 2(x-1) \Longrightarrow y = 2x + 8$

c) Cálculo del área:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8 + \int_{-3}^{2}(x^2+9)\,dx + \frac{1}{2}\cdot 13\cdot 13 = 81 + \left[\frac{x^3}{3}+9x\right]_{-3}^{2} + \frac{169}{2} = \frac{1333}{6}\,u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a las empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %.

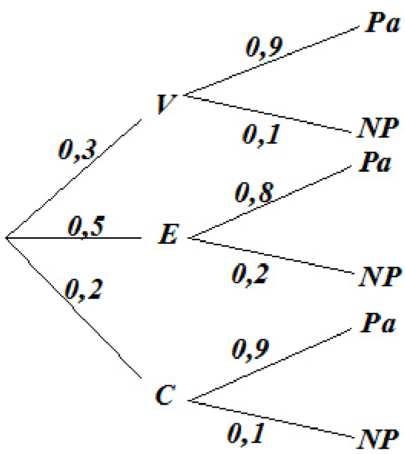
a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

Solución:

V: crédito para vivienda, E: crédito para empresa y C: crédito para consumo.

Pa: pagados y NP: no pagados.



a) $P(Pa) = P(V)\cdot P(Pa|V) + P(E)\cdot P(Pa|E) + P(C)\cdot P(Pa|C) = 0,3\cdot 0,9 + 0,5\cdot 0,8 + 0,2\cdot 0,9 = 0,85$

b)
$$P(C|Pa) = \frac{P(Pa|C)\cdot P(C)}{P(Pa)} = \frac{0,9\cdot 0,2}{0,85} = 0,21176$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo de una conversación en un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1,32 minutos. Se desea estimar la media del tiempo de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a 0,5 minutos y con un grado de confianza del 95 %.

a) Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la media muestral.

b) Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de 4,36 minutos y se elige una muestra aleatoria simple de 16 usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre 4 y 5 minutos?

Solución:

Tenemos $N(3{,}25, 0{,}8)$, $n = 64$

a) $\sigma = 1,32$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = 5,175$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n = 27$.

b) $X \sim N(4,36; 1,32) \Longrightarrow \overline{X} \sim N(4,36; 0,33)$

$$P(4 \le \overline{X} \le 5) = P\left(\frac{4-4,36}{0,33} \le Z \le \frac{5-4,36}{0{,}33}\right) =$$

$$P(-1,09 \le Z \le 1,94) = P(Z \le 1,94) - P(Z \le -1,09) = 0{,}8359$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2009) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z = & 3 \\ x+ & ky+ & z = & 3 \\ kx- & & 3z = & 6 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistem para $k = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & k & 1 & 3\\ k & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=-k^2-2k+3=0 \Longrightarrow k=1,\ \ k=-3$$

Si $k\neq 1$ y $k\neq -3 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3$ =Rango$(A)=$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $k=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Dos filas son iguales y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Si $k=-3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 1 & 3\\ -3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right),\quad \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 3\\ -3 & 0 & 6 \end{array}\right| = -60\neq 0$$

en este caso Rango$(A)=2$ y como hay un menor de orden 3 distinto de cero el Rango$\overline{A}=3$ y el sistema, en este caso, es incompatible.

b) $k=1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 3\\ x- & & 3z= & 6 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=6+3\lambda\\ y=-3-4\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

c) $k=3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 3\\ x+ & 3y+ & z= & 3\\ 3x- & & 3z= & 6 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=5/2\\ y=0\\ z=1/2 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función:

$$B(x)=-x^2+7x-10$$

en la que x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.

a) Represéntese gráficamente la función $B(x)$ con $x \geq 0$.

b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.

c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera cada semana para no incurrir en pédidas (es decir, beneficio negativo).

Solución:

a) para ello calculamos:

- Puntos de corte:

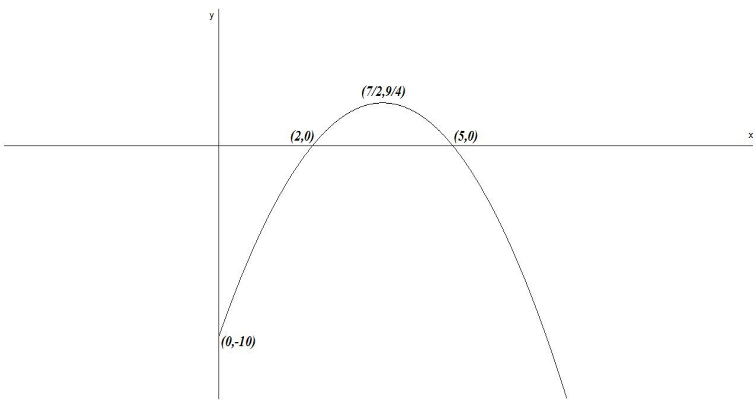
  Con el eje de abcisas hacemos $x = 0 \Longrightarrow B(0) = -10 \Longrightarrow (0, -10)$

  Con el eje de ordenadas hacemos $B(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5 \Longrightarrow (2, 0)$ y $(5, 0)$

- Máximos y mínimos:

$$B'(x) = -2x + 7 = 0 \Longrightarrow x = \frac{7}{2} \Longrightarrow \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(7/2) = -2 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo}$$



b) El beneficio máximo es $B(7/2) = 9/4 \Longrightarrow 2250$ euros con una producción de $7/2$ hectolitros.

c) La producción debe de estar comprendida entre 2 y 5 hectolitros semanales.

Problema 3 *(2 puntos)* La probabilidad de que un habitante de cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0,55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0,40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:

a) al menos uno de los dos tipos de música.

b) la música clásica y también la moderna.

c) sólo la música clásica.

d) sólo la música moderna.

Solución:

LLamamos M al suceso le gusta la música moderna y C al suceso le gusta la música clásica. Los datos del problema: $P(M) = 0,55$, $P(C) = 0,4$ y $P(\overline{M \cup C}) = 0,25$

a) $P(M \cup C) = 1 - P(\overline{M \cup C}) = 1 - 0,25 = 0,75$

b) $P(M \cap C) = P(M) + P(C) - P(M \cup C) = 0,55 + 0,40 - 0,75 = 0,20$

c) $P(C \cap \overline{M}) = P(C) - P(M \cap C) = 0,40 - 0,20 = 0,20$

d) $P(M \cap \overline{C}) = P(M) - P(M \cap C) = 0,55 - 0,20 = 0,35$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que la estancia (en días) de un cierto hospital se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 9 días. De una muestra aleatoria simple formada por 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral igual a 8 días.

a) Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media de un paciente en dicho hospital.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?

Solución:

a)

$$N(\mu, 9) \;\; n = 20, \;\; \overline{x} = 8, \;\; z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4{,}0556, 11{,}9444)$$

b) $E = 2$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 77{,}79$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n = 78$.