

Examen de Matemáticas II (Junio 2009)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

- (1 punto). Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π .
- (1 punto). Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z = 0$.
- (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π , y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución:

- Tres pasos:

- Calculo $r \perp \pi$ que pasa por $O(0,0,0)$:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 3, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Calculo el punto de corte Q de π con r :

$$\lambda + 3(3\lambda) + \lambda = 4 \implies \lambda = \frac{4}{11} \implies Q \left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{4}{11} \right)$$

- P es el punto simétrico de O respecto de Q :

$$\frac{P+O}{2} = Q \implies P = 2Q - O = \left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11} \right)$$

-
-

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

-
-
- Si $y = 0$, $z = 0 \implies A(4, 0, 0)$
Si $x = 0$, $z = 0 \implies B(0, 4/3, 0)$
Si $x = 0$, $y = 0 \implies C(0, 0, 4)$

$$\vec{OA} = (4, 0, 0), \vec{OB} = (0, 4/3, 0), \vec{OC} = (0, 0, 4)$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{32}{9} u^3$$

Problema 2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 4\lambda y + 2z = 2\lambda \\ \lambda x + y + \lambda z = \lambda \\ 4\lambda x + 4\lambda y + \lambda z = 9 \end{cases}$$

, Se pide:

1. (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ .
2. (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{array} \right) \quad |A| = -4\lambda(5\lambda^2 - 6\lambda + 1) = 0 \implies \lambda = 0 \quad \lambda = 1 \quad \lambda = \frac{1}{5}$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 1/5 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = 0$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

$$\text{Como } |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$$

Como

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

- Si $\lambda = 1$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

- Si $\lambda = 1/5$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4/5 & 2 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

Si $\lambda = -1$

$$\begin{cases} 4x - & 4y + & 2z = & -2 \\ -x + & y + & z = & -1 \\ -4x - & 4y - & z = & 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)$$

Si $\alpha = 0 \implies \lambda = \frac{1}{4} \implies$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x + 8} \right)^{(x+1)} = e^{1/4}$$

Si $\alpha \neq 0 \implies \lambda = 0 \implies$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)} = e^0 = 1$$

Problema 4 (2 puntos) Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

Solución:

Se trata de una integral que se resuelve por partes:

$$(u = t^2 \implies du = 2t dt; \quad dv = e^{-t} dt \implies v = -e^{-t})$$

$$\int t^2 e^{-t} dt = -t^2 e^{-t} + 2 \int t e^{-t} dt =$$

$$(u = t \implies du = dt; \quad dv = e^{-t} dt \implies v = -e^{-t})$$

$$= -t^2 e^{-t} + 2 \left[-t e^{-t} + \int e^{-t} dt \right] = -t^2 e^{-t} + 2 \left[-t e^{-t} - e^{-t} \right] = -e^{-t} (t^2 + 2t + 2)$$

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt = -e^{-t} (t^2 + 2t + 2) \Big|_0^x = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + 2$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2009)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

1. (1 punto). Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .
2. (1 punto). Determinar la distancia entre las rectas r y s .
3. (1 punto). Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_s(-2, 0, 2) \end{cases} \implies \pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 1 & y-2 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x - 2z - 1 = 0$$

2. $\overrightarrow{P_r P_s} = (-3, -2, 2)$:

$$\left| [\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] \right| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \right| = |-14| = 14$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |(2, 0, -4)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{14}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} u$$

3.

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (2, 3, 1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_s(-2, 0, 2) \end{cases} \implies \overrightarrow{P_t P_s} = (-2, 0, 2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 \implies \text{Se cruzan}$$

Problema 2 (3 puntos) Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x - 1)^3(x - 5)$$

Obtener:

1. (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
2. (1 punto). Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
3. (1 punto). La función f sabiendo que $f(0) = 0$

Solución:

1.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

2. En $x = 1$ hay un máximo y en $x = 5$ hay un mínimo. Para calcular los puntos de inflexión calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 4(x - 4)(x - 1)^2$$

$f''(x) = 0 \implies x = 4$ y $x = 1$. El único posible punto de inflexión es $x = 4$ ya que en $x = 1$ hay un máximo:

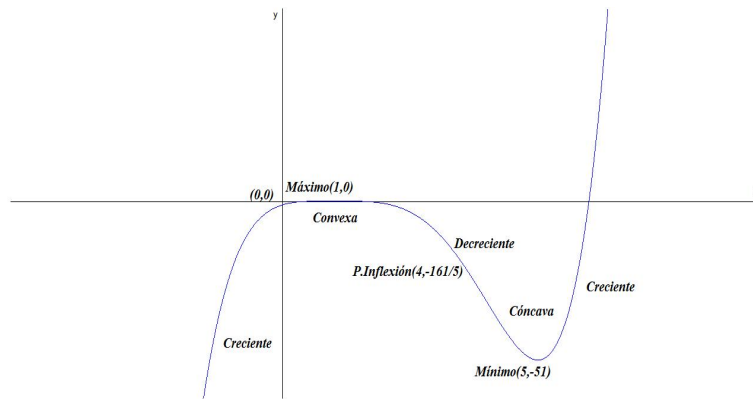
	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	-	-	+
$f(x)$	Convexa ∩	Convexa ∩	Cóncava ∪

3.

$$f(x) = \int [x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5] dx = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + C$$

$$f(0) = 0 + C = 0 \implies C = 0$$

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x$$



Problema 3 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

1. (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ
2. (0,5 punto). Resolver el sistema cuando sea posible

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad |\bar{A}| = -(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \implies \lambda = 2 \quad \lambda = 6$$

- Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 6 \implies |\bar{A}| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A})$ luego en este caso el sistema será Incompatible.

- Si $\lambda = 2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Compatible Determinado.

- Si $\lambda = 6$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema Compatible Determinado.

2. Cuando $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Cuando $\lambda = 6$:

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4 \\ y = -14 \end{cases}$$

Problema 4 (2 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (1 punto). Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a .
2. (1 punto). Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

Solución:

1. $A = a^3 - 3a + 2 = 0 \implies a = 1, a = -2$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 1$$

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 2$$

2. Si $a = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$