Examen de Matemáticas II (Abril 2009)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx+ & y+ & 2z = & m \\ mx+ & 2y- & z = & 1 \\ 2x+ & 3y+ & mz = & 2 \end{array}\right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m e interprtarlo geométricamente.

2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx+ & y+ & 2z = & m \\ mx+ & 2y- & z = & 1 \\ 2x+ & 3y+ & mz = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} m & 1 & 2 & m \\ m & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & m & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$|A| = m^2 + 9m - 10 = 0 \Longrightarrow m = 1, \; m = -10$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -10 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas y el sistema sería Compatible Determinado (Solución única). Los tres planos se cortan en un punto

Si $m = -10$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rcr|r} -10 & 1 & 2 & -10 \\ -10 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -10 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc} -10 & 1 \\ -10 & 2 \end{array}\right| = -10 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como:

$$\left|\begin{array}{crr} 1 & 2 & -10 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -10 & 2 \end{array}\right| = 176 \neq 0$$

Tendríamos Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución). Los tres planos se cortan dos a dos.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como: $F_3 = F_1 + F_2$ Tendríamos Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminados(Infinitas soluciones). Los tres planos se cortan en una recta.

2. Para $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 1 \\ x+ & 2y- & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 5\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Resolver:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin 2x \, dx$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1 + \sin x)}$

Solución:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin 2x \, dx = \left.\frac{\sin 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1 + \sin x)} = 0$

Problema 3 *(3 puntos)* El plano $\pi : x + 2y - z + 6 = 0$ corta a los ejes coordenados en tres puntos que, junto con el origen O, forman un tetradro. Se pide calcular:

1. (1,5 puntos) Volumen del tetraedro.

2. (1,5 puntos) Altura del tetraedro sobre el vértice O.

Solución:

1. LLamamos A al punto de corte co el eje OX: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A(-6, 0, 0)$
   LLamamos B al punto de corte co el eje OY: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B(0, -3, 0)$
   LLamamos C al punto de corte co el eje OZ: hacemos $x = 0$ y $y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, 6)$
   Tenemos los vectores: $\overrightarrow{OA} = (-6, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, -3, 0)$ y $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 6)$.

$$V = \frac{1}{6}|\left|\begin{array}{rrr} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right| = 18 \ u^3$$

2.

$$\text{Altura} = d(O, \pi) = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sea el plano $\pi : x + 2y - z + 6 = 0$, encontrar el punto simétrico del origen de coordenadas O respecto de π.

Solución:

- Buscamos una recta $r \perp \pi$ que pase por O:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte entre r y π:

$$\lambda + 2(2\lambda) + \lambda + 6 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

  Luego el punto es el $O'(-1, -2, 1)$.

- El punto O'' simétrico de O respecto de O' tiene que cumplir:

$$\frac{O + O''}{2} = O' \Longrightarrow O'' = 2O' - O = (-2, -4, 2)$$

Examen de Matemáticas II (Abril 2009)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

1. (1 punto). Estudiar su posición relativa.
2. (1 punto). Recta perpendicular a ambas rectas y que las corta.
3. (1 punto). Recta que pasando por el origen de coordenadas corte a ambas rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 0) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

1. $\overrightarrow{P_sP_r} = (2, 0, -2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 0) \Longrightarrow |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ u$$

2. Obtengo la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 0) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow z + 1 = 0$$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+1 \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - y - 2z + 3 = 0$$

$$t: \left\{ \begin{array}{l} z + 1 = 0 \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{array} \right.$$

3. Obtengo la recta h como intersección de dos planos:

$$\pi_1: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP_r} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 0) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \pi_2: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP_s} = (-1, 0, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right.$$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + y + z = 0$$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 2y + z = 0$$

$$h: \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Encontrar los puntos de la recta $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$, que se encuentran a una distancia igual a 3 del punto $P(0, 1, 1)$

Solución:

Calculamos la ecuación de una esfera de centro $P(0, 1, 1)$ y radio 2 y ponemos la recta en su ecuación paramétrica:

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9, \quad r: \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

Sustituimos los puntos de la recta en la esfera:

$$\lambda^2(1 + \lambda - 1)^2(1 + \lambda - 1)^2 = 9 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$$

Si $\lambda = \sqrt{3} \Longrightarrow P_1(\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$

Si $\lambda = -\sqrt{3} \Longrightarrow P_2(-\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

Problema 3 *(3 puntos)* Resolver:

1. (1,5 puntos). $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^2-x-6}\,dx$

2. (1,5 puntos). $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2x-1})$

Solución:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^2-x-6}\,dx = \frac{x^2}{2}+x+\frac{9}{5}\ln|x+2|+\frac{26}{5}\ln|x-3|+C$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2x-1})=\frac{3}{2}$

Problema 4 *(2 puntos)* Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide

1. (1 punto). Encontrar todas las matrices X tales que: $AX = XA$

2. (1 punto). Si $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial: $AX = I - BX$

Solución:

1. $AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} -a+2c=-a\Longrightarrow\ c=0 \\ -b+2d=2a+b\Longrightarrow\ a=b-d \\ c=-c\Longrightarrow\ c=0 \\ d=2c+d\Longrightarrow\ c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow X=\begin{pmatrix} d-b & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

2. $AX = I - BX \Longrightarrow\ X=(A+B)^{-1}$:

$$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X=(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ 1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$