Examen de Matemáticas II (Modelo 2009)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π, se pide:

1. (0,5 puntos). Determinar la posición relativa de π y r.
2. (1 punto). Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.
3. (1,5 puntos). Sea Q el punto intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.

Solución:

1. De dos formas difrentes:

   - La ecuación de la recta en paramétricas es $r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$, y si sustituimos en el plano π tenemos:

     $$(3 + 2\lambda) + 2(2 + \lambda) - (5 + 4\lambda) = 2 \Longrightarrow 2 = 2$$

     expresión que se cumple para cualquier punto de la recta independientemente del valor de λ y, por tanto, la recta r está contenida en el plano π.

   - Ponemos la recta r como intersección de dos planos:

     $$\frac{x-3}{2} = \frac{z-5}{4} \Longrightarrow 2x - z = 1$$

     $$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} \Longrightarrow x - 2y = -1$$

     Ahora estudiamos el sistema formado por estos dos planos y el plano π

     $$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - 2y = -1 \\ 2x - z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

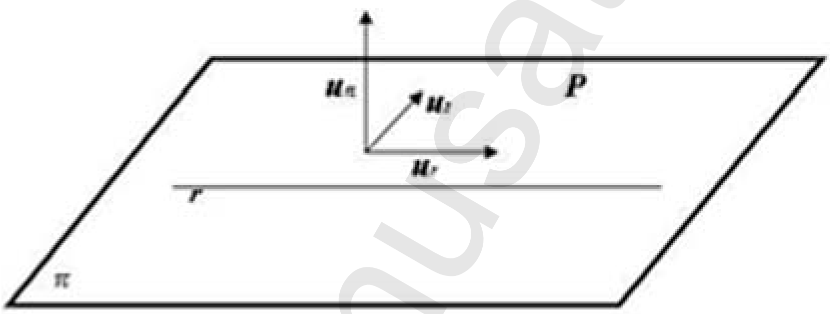
$$\left.\begin{array}{r} |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \\ \\ F_3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

El plano π y la recta r tienen infinitos puntos comunes y, por tanto, la recta está contenida en el plano.

2. Para que el enuciado tenga sentido es necesario que el punto P esté en el plano π, basta sustituir el punto en el plano para comprobarlo.

El vector $\overrightarrow{u_t}$ de la recta t que buscamos tiene que ser perpendicular



al vector característico del plano $\overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1)$ y al vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 4)$ de la recta r. Luego:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(3, -2, -1)$$

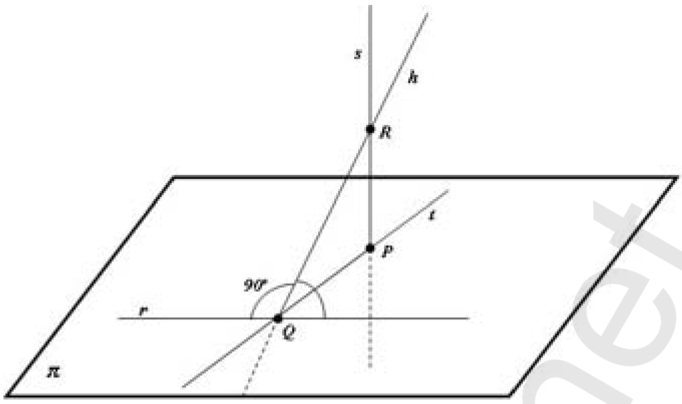
$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3, -2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$

Evidentemente esta recta tiene que estar contenida en el plano π.

3. La situación geométrica es la siguiente:

Tenemos que encontrar una recta s perpendicular al plano π y que pase por el punto P

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{array} \right.$$



Un punto cualquiera R de la recta s es $R(-2+\lambda, 3+2\lambda, 2-\lambda)$.

Ahora buscamos el punto de corte Q entre las rectas t y r

$$r: \left\{\begin{array}{l} x = 3+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 5+4\lambda \end{array}\right. , \quad t: \left\{\begin{array}{l} x = -2+3\mu \\ y = 3-2\mu \\ z = 2-\mu \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3+2\lambda = -2+3\mu \\ 2+\lambda = 3-2\mu \\ 5+4\lambda = 2-\mu \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow Q(1,1,1)$$

Sólo nos queda por comprobar que los vectores $\overrightarrow{QR} = (-3+\lambda, 2+2\lambda, 1-\lambda)$ y $\overrightarrow{u_r} = (2,1,4)$ son siempre perpendiculares. Para ello calculamos su producto escalar y debe de ser cero independientemente del valor del parámetro λ

$$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{u_r} = (-3+\lambda, 2+2\lambda, 1-\lambda)\cdot(2,1,4) = -6+2\lambda+2+2\lambda+4-4\lambda = 0$$

Luego la recta h que pasa por los puntos Q y R es siempre perpendicular a la recta r sea cual sea el punto R que tomemos de la recta s.

Problema 2 *(3 puntos)* Sea:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1-\dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{12}\left(1-(x-2)^2\right) & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

1. (1 punto). Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
2. (1 punto). Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$
3. (1 punto). Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

1. (1 punto). Continuidad:

$$\lim_{x\longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (3/2)} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{7}{16}$$

$$\lim_{x\longrightarrow (3/2)^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (3/2)^+} \frac{7}{12}\left(1 - (x-2)^2\right) = \frac{7}{16}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16}$$

   Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (3/2)^+} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16} \Longrightarrow$$

   f es continua en $x = \dfrac{3}{2}$

   Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-7(x-2)}{6} & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}^-\right) = -\frac{3}{4} \\ f'\left(\frac{3}{2}^+\right) = \frac{7}{12} \end{cases}$$

   Luego:

$$f'\left(\frac{3}{2}^-\right) \neq f'\left(\frac{3}{2}^+\right)$$

   La función no es derivable en $x = 3/2$

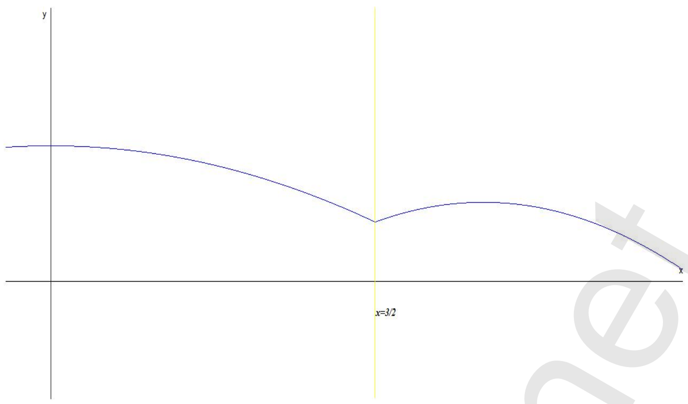
2. Estudiamos su representación gráfica

   Primero los extremos

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} = 0 & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-7(x-2)}{6} = 0 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ x = 2 \quad \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

   Recurrimos a la segunda derivada para ver de que tipo son

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \text{Máximo} \quad \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-7}{6} \Longrightarrow \text{Máximo} \quad \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$



x	$f(x)$
0	1
3/2	7/16
2	7/12

Problema 3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Discutirlo según los didtintos valores del parámetro k.
2. (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k \end{array}\right)$$

$$|\overline{A}| = 3(k-1) = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Como el menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango$(A) = 2$ independientemente del valor de k.

Si $k \neq 1 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2 =$ n^o de incógnitas y el sistema es Incompatible, es decir, no tiene solución.

Si $k = 1$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{array}\right)$, $|\overline{A}| = 0$ y $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$

Luego en este caso Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, es decir, tiene solución única.

2.

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{array}\right| = 0$$

Solución:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{array}\right| = (x+1)(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 2(x-1) & 1 & x+1 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ x-1 & 1 & x+1 \end{array}\right| =$$

$$(x+1)^2(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 2(x-1) & 1 & 1 \\ x-1 & x+1 & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] = (x+1)^2(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 2(x-1) & 1 & 1 \\ -(x-1) & x & 0 \\ -(x-1) & 0 & 0 \end{array}\right| =$$

$$(x+1)^2(x-1)^2\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right| = -(x^2-1)^2\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x & 0 \end{array}\right| = x(x^2-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2008)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)*. Dados el punto $P(1,-1,2)$ y el plano $\pi : 2x - y + z = 11$, se pide:

1. (1,5 puntos). Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

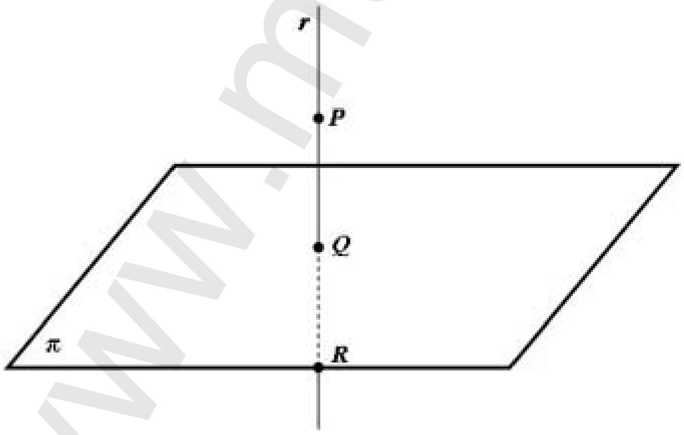
2. (1,5 puntos). Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Solución:

1. Tenemos

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,1) \\ P_r = P(1,-1,2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en el plano tenemos



$$2(1+2\lambda) - (-1-\lambda) + (2+\lambda) - 11 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Sustituyendo este valor en r tenemos $Q(3,-2,3)$.

El punto Q es el punto medio entre P y el punto R que buscamos

$$Q = \frac{P+R}{2} \Longrightarrow R = 2Q - P = 2(3,-2,3) - (1,-1,2) = (5,-3,4)$$

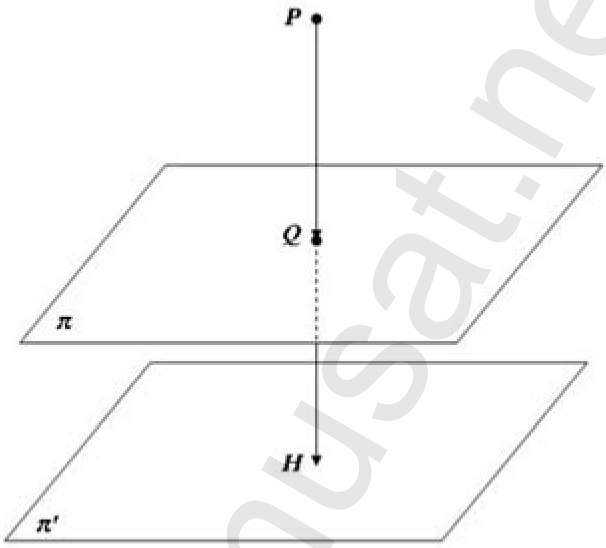
Luego $R(5,-3,4)$ es el punto simétrico de P respecto del plano π.

2. El vector $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) = \overrightarrow{u_\pi}$ y es perpedicular al plano π. Tenemos

$$H = P + \lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{PH} = -\lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow$$

$$|\overrightarrow{PH}| = \lambda |\overrightarrow{u_\pi}| = \lambda\sqrt{6} = 5\sqrt{6} \Longrightarrow \lambda = 5$$

Luego el punto $H = (1, -1, 2) + 5(2, -1, 1) = (11, -6, 7)$. El plano π' que buscamos contiene a este punto y tiene el mismo vector característico que π



$\pi' : 2x - y + z = \lambda \Longrightarrow 22 + 6 + 7 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 35 \Longrightarrow 2x - y + z = 35$

Nota: Podemos comprobar si $d(P, \pi') = 5\sqrt{6}$:

$$d(P, \pi') = \frac{|2 + 1 + 2 - 35|}{\sqrt{6}} = \frac{30}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6}$$

y también podemos comprobar que

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \text{ y } |\overrightarrow{QH}| = \sqrt{64 + 16 + 16} = 4\sqrt{6}$$

La suma de ambos módulos nos vuelve a dar $5\sqrt{6}$.

Problema 2 *(3 puntos)* Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que $det(A) = 4$, se pide:

1. (1 punto). Calcular $det(A^3)$ y $det(3A)$.

2. (2 puntos). Calcular $det(B)$ y $det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:

$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

Solución:

1.
   - $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 4^3 = 64$
   - $|3A| = |(3C_1, 3C_2, 3C_3)| = 3^3|A| = 27 \cdot 4 = 108$

2.
   - $|B| = |(2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)| = -10|(C_1, C_1 - C_2, C_3)| =$

     $= -10\left[(C_1, C_1, C_3) - (C_1, C_2, C_3)\right] = 10|A| = 40$
   - Si $|B \cdot B^{-1}| = 1 \Longrightarrow |B| \cdot |B^{-1}| = 1 \Longrightarrow |B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = \dfrac{1}{40}$

Problema 3 *(2 puntos)* Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

1. (1 punto). Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
2. (1 punto). Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Continuidad:

$$\lim_{x \longrightarrow 0)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(-\frac{x}{x^2+1}\right) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x^2+1}\right) = 0$$

$$f(0) = 0$$

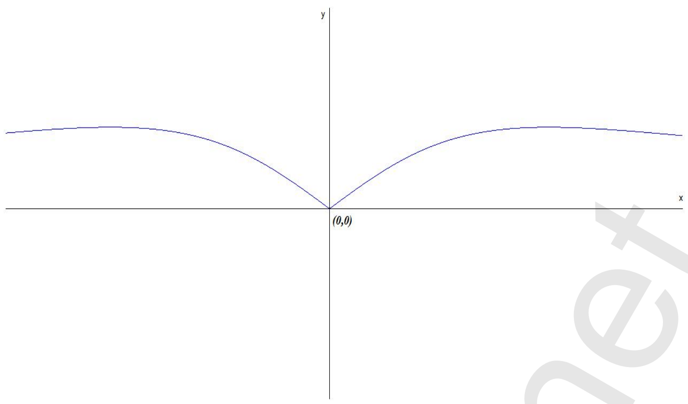
   Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \Longrightarrow$$

   f es continua en $x = 0$

   Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases}$$



Luego:

$$f'\left(0^-\right) \neq f'\left(0^+\right)$$

La función no es derivable en $x = 0$

2. Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle la función debe ser continua en el intervalo $(-1, 1)$ y derivable en el intervalo $[-1, 1]$, lo cual no es cierto según el apartado anterior.

Problema 4 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x. Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

Solución:

- Comprobamos si hay continuidad en el punto $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \left((x-1)^2\right) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (\ln x) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 1$

- Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con $y = 1$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \ln x = 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x = e & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- Calculamos el área:

$$S = |S_1| + |S_2|$$

Resolvemos las integrales por separado

$$S_1 = \int_0^1 (1 - (x-1)^2)dx = -\frac{x^3}{3} + x^2\Big]_0^1 = \frac{2}{3} \Longrightarrow |S_1| = \frac{2}{3}$$

La siguiente integral se resuelve por partes $u = \ln x \Longrightarrow u' = dx/x$ y $dv = dx \Longrightarrow v = x$

$$\int (1 - \ln x)dx = x - \left(x \ln x - \int dx\right) = 2x - x \ln x$$

$$S_2 = \int_1^e (1 - \ln x)dx = 2x - x \ln x]_1^e = e - 2 \Longrightarrow |S_2| = e - 2$$

$$S = \frac{2}{3} + e - 2 = e - \frac{4}{3} u^2$$