

**Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)**  
**Mayo 2009**

---

---

**Problema 1** Calcular los límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{\ln(1 + \sin x)}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{\sin^2 x}$

**Solución:**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{\ln(1 + \sin x)} = -1$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}$

**Problema 2** Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Se pide:

1. Asíntotas
2. Monotonía y extremos
3. Curvatura y puntos de Inflexión
4. Representación aproximada
5. La recta tangente y la normal a  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = 2$
6. Área encerrada por la curva y las rectas  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $y = 0$

**Solución:**

1.
  - Verticales: No Hay, el denominador no se anula nunca.
  - Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \infty$$

No hay asíntota horizontal.

- Oblicuas:  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} + x \right) = 0$$

La asíntota oblicua es  $y = x$

2.

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$$

La función es siempre creciente. En  $x = 0$  la función pasa de crecer a crecer y, por tanto, no es un extremo.

3.

$$f''(x) = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = 0, x = \pm\sqrt{3}$$

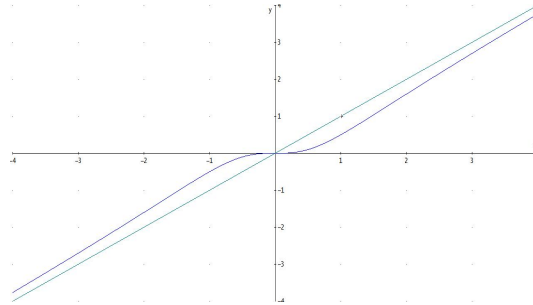
	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava:  $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$

Convexa:  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

Serán puntos de Inflexión los puntos:  $(0, 0)$ ,  $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$  y  $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

4. La representación será:



5.

$$f(2) = \frac{8}{5}, f'(2) = m = -\frac{28}{25}$$

Recta tangente:  $y - \frac{8}{5} = -\frac{28}{25}(x - 2)$  Recta normal:  $y - \frac{8}{5} = \frac{25}{28}(x - 2)$

6.

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{\ln|x^2 + 1|}{2} \right|_0^1 = \frac{1 - \ln 2}{2} u^2$$