Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2008)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)*Una familia dispone de 80 euros mensuales para realizar la compra de la carnicería. El primer mes compran 10 kg de carne de pollo, 6 kg de carne de cerdo y 3 kg de carne de ternera y les sobran 3,1 euros. El mes siguiente adquieren 10 kg de carne de pollo, 7 kg de carne de cerdo, 2 kg de carne de ternera y les sobran 5,1 euros. El tercer mes compran 11 kg de carne de pollo, 6 kg de carne de cerdo, 2 kg de carne de ternera abonando un total de 72 euros y 30 céntimos. Suponiendo que no ha variado el precio de la carne en estos meses ¿cuánto cuesta el kilo de carne de pollo, cerdo y ternera?

Solución:

x es el precio del kilo de pollo.
y es el precio del kilo de cerdo.
z es el precio del kilo de ternera.

$$\left\{\begin{array}{l} 10x+6y+3z=76,9 \\ 10x+7y+2z=74,9 \\ 11x+6y+2z=72,3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2,5 \\ y=5,1 \\ z=7,1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, $X=\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$

a) Hallar los valores de n para los que la matriz A tiene inversa.

b) Resolver la ecuación matricial $A\cdot X=B$ para $n=3$

Solución:

a)

$$|A|=n-2\Longrightarrow n=2$$

Si $n\neq 2\Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $n=2\Longrightarrow$ No existe A^{-1}

b) $A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}$$

a) Calcular sus asíntotas y esbozar su gráfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: Las únicas posibles son $x = \pm 2$

  En $x = 2$:
  $$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{3x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$
  $$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{3x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = \infty$$
  En $x = -2$:
  $$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{3x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = \infty$$
  $$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{3x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$

- Horizontales:
  $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 - 4} = 3 \Longrightarrow y = 3$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales.

Para representar la función calculamos:

- Puntos de Corte: $(0, 0)$

- Monotonía:

$$f'(x) = -\frac{24x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

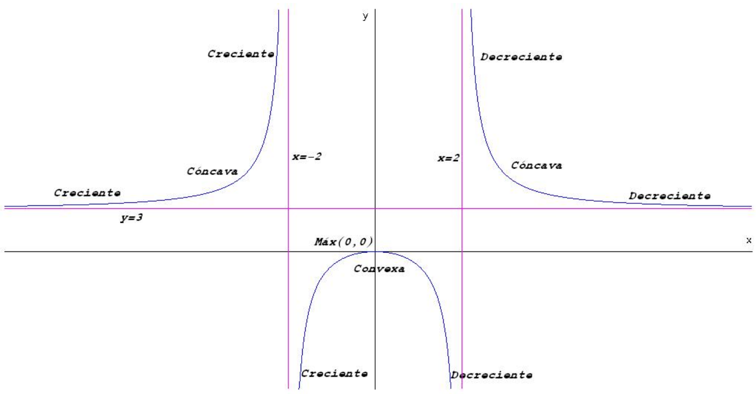
Luego la función presenta un máximo en el punto $(0, 0)$.

- Curvatura:

$$f''(x) = \frac{24(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de Inflexión}$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

- Representación gráfica:



b) El punto de tangencia es el $(0, 0)$ donde la función presenta un máximo y, por tanto, la tangente coincide con el eje de abcisas $y = 0$.

Problema 4 *(3 puntos)*En una ebanistería se fabrican dos tipos de mesas: mesas de comedor y mesas de ordenador. Las mesas de comedor necesitan 4 m^2 de madera y las mesas de ordenador, 3 m^2. El fabricante dispone de 60 m^2 de madera y decide confeccionar al menos 3 mesas de comedor y al menos el doble de mesas de ordenador que de mesas de comedor. Además, por cada mesa de ordenador se obtiene un beneficio de 200 euros, mientras que obtiene un beneficio de 300 euros por cada mesa de comedor. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe fabricar para obtener el beneficio máximo?

Solución:

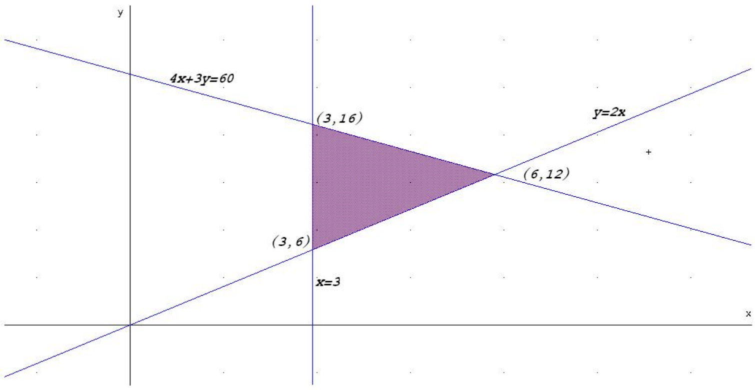
x n$^{\text{o}}$ de mesas de comedor.

y nº de mesas de ordenador.

La región factible estaría formada por las restricciones:

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 60 \\ x \geq 3 \\ y \geq 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo sería:



$$z(x, y) = 300x + 200y$$

Buscamos en qué punto la función objetivo tiene el máximo

$$z(3, 6) = 900 + 1200 = 2100$$
$$z(6, 12) = 1800 + 2400 = 4200$$
$$z(3, 16) = 900 + 3200 = 4100$$

El máximo beneficio es de 4200 euros y se obtiene fabricando 6 mesas de comedor y 12 mesas de ordenador.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2008) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)*Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & my- & z= & 0\\ mx- & y+ & z= & 2\\ mx+ & 2y- & 2z= & -2 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores de m.

b) Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & m & -1 & 0\\ m & -1 & 1 & 2\\ m & 2 & -2 & -2 \end{array}\right), \quad |A|=3m(m-1)=0 \quad m=0, \ m=1$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq 0 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $m=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Como $|A|=0$ y $\left|\begin{array}{rr} 2 & 0\\ 0 & -1 \end{array}\right|\neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.

Como

$$|A_2|=0, \quad |A_2|=\left|\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right|=4\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Luego en este caso Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible (No tiene Solución).

Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Como La tercera fila $F_3 = F_1 - F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$.

Luego $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ \\ y = -\dfrac{4}{3} + \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)*

a) Representar la región del plano definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} -x+ & y \leq & 60 \\ x+ & y \geq & -40 \\ 11x+ & 3y \leq & 40 \end{array} \right.$$

b) Maximizar la función $f(x, y) = 10x - y$ en la región obtenida.

c) Minimizar la función $g(x, y) = x - 10y$.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{rrr} -x+ & y \leq & 60 \\ x+ & y \geq & -40 \\ 11x+ & 3y \leq & 40 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y \geq & -60 \\ x+ & y \geq & -40 \\ 11x+ & 3y \leq & 40 \end{array} \right.$$

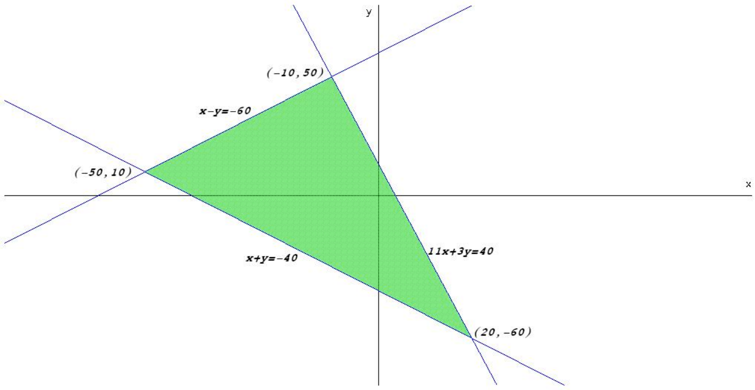
b)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-10, 50) = -150 \\ f(-50, 10) = -510 \\ f(20, -60) = 260 \end{array} \right.$$

El máximo de f en este recinto se encuentra en el punto $(20, -60)$ con un valor de 260.

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} g(-10, 50) = -510 \\ g(-50, 10) = -150 \\ g(20, -60) = 620 \end{array} \right.$$



El mínimo de g en este recinto se encuentra en el punto $(-10, 50)$ con un valor de -510.

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, se pide determinar:

a) Los puntos en los que la gráfica de f corta a los ejes de coordenadas.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) El área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función y el eje OX.

Solución:

a) Puntos de Corte:

- Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3 \Longrightarrow$ los puntos son $(0, 0)$ y $(3, 0)$.
- Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow$ el punto es el $(0, 0)$.

b) Monotonía:

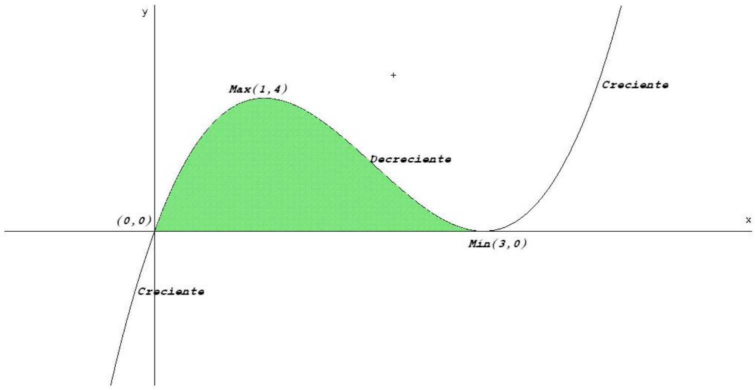
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

La función tiene un máximo en $(1, 4)$ y un mínimo en $(3, 0)$

c) El área encerrada se encuentra entre los puntos de abcisa $x = 0$ y $x = 3$:

$$S = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\, dx = \left. \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{27}{4}\ u^2$$



Problema 4 *(2 puntos)*El beneficio en euros por kg de un alimento perecedero se estima que viene dado por la función $B(x) = 4x - 2x^2 - 0,68$, donde x es el precio en euros de cada kg de alimento. Se pide:

a) ¿Entre qué precios por kg se obtienen beneficios?

b) ¿A qué precio se obtiene el máximo beneficio?

c) Si en un comercio se tienen 1000 kg de ese alimento ¿qué beneficio máximo puede obtener?

Solución:

a) $B(x) = 4x - 2x^2 - 0,68 = 0 \Longrightarrow x = 0,1875$ y $x = 1,8125$, lo que quiere decir que, los beneficios se encuentran entre los precios de 0,1875 $Euros$/kg y 1,8125 $Euros$/kg

b)
$$B'(x) = -4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

	$(-\infty; 1)$	$(1; \infty)$
$B'(x)$	$+$	$-$
$B(x)$	Creciente	Decreciente

Luego en el punto de abcisa $x = 1$ hay un Máximo. El beneficio máximo será:

$$B(1) = 1,32 \Longrightarrow 1,32\, Euros/\text{kg}$$

c) Si se tienen 1000 kg el beneficio máximo será: $1000 \cdot 1,32 = 1320\, Euros$.