Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2007) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa de tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa de tipo B necesita 15 horas de albañilería, 4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontanería y 5 de electricista. La empresa emplea exactamente 270 horas de trabajo al mes de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo instala la empresa en un mes?

Solución:

x: nº de casas tipo A

y: nº de casas tipo B

z: nº de casas tipo C

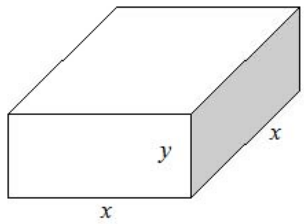
	albañilería	fontanería	electricidad
A	10	2	2
B	15	4	3
C	20	6	5
totales	270	68	58

$$\left\{\begin{array}{l} 10x + 15y + 20z = 270 \\ 2x + 4y + 6z = 68 \\ 2x + 3y + 5z = 58 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 6 \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?

Solución:

www.musat.net



$$V = x^2y = 500 \Longrightarrow y = \frac{500}{x^2}$$

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{2000}{x^2}$$

$$S(x) = x^2 + \frac{2000}{x^2} \Longrightarrow S'(x) = \frac{2x^3 - 2000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 10$$

	$(-\infty, 10)$	$(10, \infty)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decrece	crece

Las dimensiones son $x = 10$ dm e $y = 5$ dm.

Problema 3 *(2 puntos)* Se consideran dos actividades de ocio: $A =$ ver televisión y $B =$ visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a $0,46$; la probabilidad de que practique B es igual a 0,33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0,15.

1. Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores?

2. Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

Solución:

$$P(A) = 0,46; \quad P(B) = 0,33; \quad P(A \cap B) = 0,15$$

1.

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 0,36$$

2.

$$P(A \cap B | A \cup B) = \frac{P(A \cap B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \frac{0,15}{0,64} = 0,234375$$

www.musat.net

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que la calificación en Matemáticas obtenida por los alumnos de una cierta clase es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 puntos. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 10 y se obtiene una suma de sus calificaciones igual a 59,5 puntos.

1. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la calificación media de la clase.
2. ¿Qué tamaño ha de tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 puntos, con el nivel de confianza del 95 %.

Solución:

1. Se trata de una distribución $N(\mu, 1{,}5)$, $n = 10$, $\overline{x} = 5{,}95$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5{,}020290367, 6{,}879709632)$$

2.

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0{,}5 = 1{,}96\frac{1,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 34{,}5744$$

Luego $n = 35$

www.musat.net

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2008) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros. Las del tipo B garantizan una ganancia del 5 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el trople de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determínese dicha ganancia máxima.

Solución:

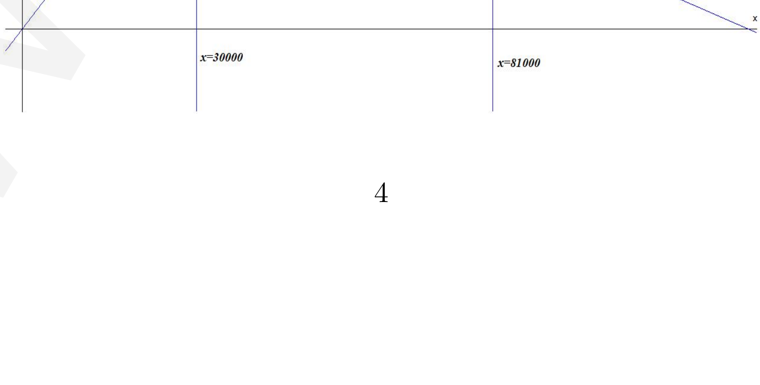
Sea x cantidad invertida en A.

Sea y cantidad invertida en B.

La función objetivo: $z(x, y) = 0,1x + 0,05y$

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} x + y \leq 125000 \\ 30000 \leq x \leq 81000 \\ y \geq 25000 \\ y \leq 3x \end{cases}$$



www.musat.net

$$\begin{array}{rcr} z(30000, 25000) & = & 4250 \\ z(81000, 25000) & = & 9350 \\ z(30000, 90000) & = & 7500 \\ z(81000, 44000) & = & 10300 \\ z(31250, 93750) & = & 7812,5 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberá invertir 81000 euros en acciones tipo A y 44000 euros en acciones tipo B con un beneficio máximo esperado de 10300 euros.

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}, \quad x \neq 2$$

1. Determínense las asíntotas de f.
2. Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.
3. Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_3^5 (x^2-4)f(x)\,dx$.

Solución:

1. Asíntotas:

   - Verticales: $x = 2$ y $x = -2$

   $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

   - Horizontales: $y = 1$

   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2-4} = 1$$

   - Oblicuas: No hay al haber horizontales.

www.musat.net

2.

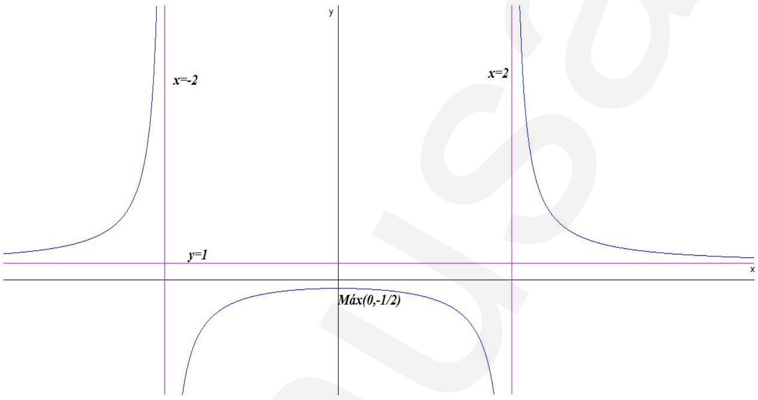
$$f'(x) = -\frac{12x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo: $(-\infty, 0)$

La función decrece en el intervalo: $(0, +\infty)$

Presenta un máximo en el punto $(0, -1/2)$



3.

$$\int_3^5 (x^2-4)f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2+2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + 2x\right]_3^5 = \frac{110}{3}$$

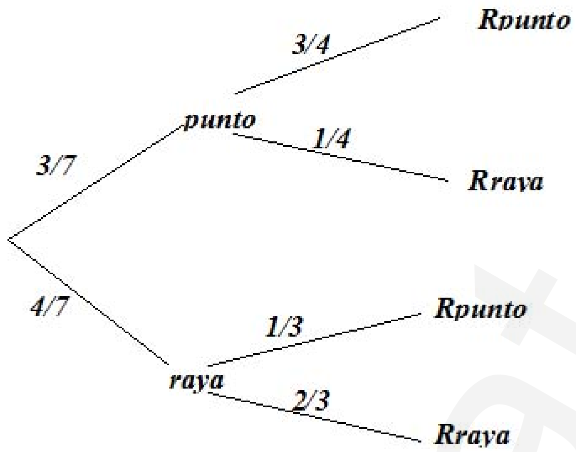
Problema 3 *(2 puntos)* Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son *punto* y *raya* y que el telégrafo envía un *punto* con probabilidad $\frac{3}{7}$ y una *raya* con probabilidad $\frac{4}{7}$. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un *punto* se reciba una *raya* con probabilidad $\frac{1}{4}$ y que cuando se envíe una *raya* se reciba un *punto* con probabilidad $\frac{1}{3}$.

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

1. Si se recibe una *raya*, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una *raya*?

2. Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe *punto* − *punto* se hubiera enviado *raya* − *raya*

www.musat.net



Solución:

1.

$$P(Rraya|raya) = \frac{P(Rraya|raya)\cdot P(raya)}{P(Rraya)} = \frac{2/3\cdot 4/7}{3/7\cdot 1/4 + 4/7\cdot 2/3} =$$

$$= \frac{32}{41} = 0,7804878048$$

2.

$$P(Rpunto|raya) = \frac{1}{3} \Longrightarrow P(Rpunto{-}Rpunto|raya{-}raya) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Problema 4 *(2 puntos)* La duración de la vida de una determinada especie de tortuga se supone que es una variable aleatoria, con distribución normal de desviación típica igual a 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen las siguientes duraciones, en años:

$$46,\quad 38,\quad 59,\quad 29,\quad 34,\quad 32,\quad 38,\quad 21,\quad 44,\quad 34$$

1. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la vida media de dicha especie de tortugas.
2. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra observada para que el error de la estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 90 %

Solución:

1. Se trata de una distribución $N(\mu, 10)$, $n = 10$, $\overline{x} = 37{,}5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (31{,}30193578, 43{,}69806421)$$

2.
$$z_{\alpha/2} = 1{,}645$$
$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1{,}645\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 10{,}8241$$

   Luego $n = 11$

www.musat.net