Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2007) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno de barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?

Solución:

x: hectáreas de barbecho

y: hectáreas de trigo

z: hectáreas de cebada

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y+z & = 10 \\ y & = z+2 \\ x & = y+z-6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \\ z=3 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Cáculese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 1 - x^2$$

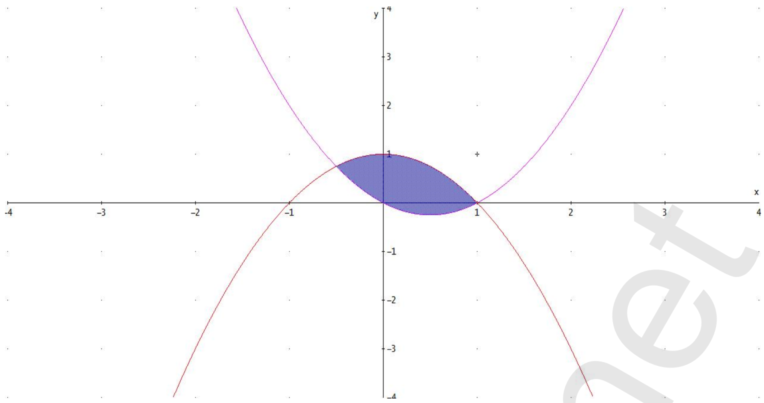
Solución:

Buscamos los puntos de corte entre ambas gráficas

$$x^2 - x = 1 - x^2 \Longrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}, \;\; x = 1$$

$$S = \left| \int_{-1/2}^{1} (2x^2 - x - 1)\, dx \right| = \left| \left. \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1/2}^{2} \right| = \frac{9}{8}\, u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual a cinco en el dado.



1. Cacúlese la probabilidad de que un jugador gane.
2. Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtubiera dos caras al lanzar las monedas?

Solución:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(CC1), (CC2), (CC3), (CC4), (CC5), (CC6),\\ &(CX1), (CX2), (CX3), (CX4), (CX5), (CX6),\\ &(XC1), (XC2), (XC3), (XC4), (XC5), (XC6),\\ &(XX1), (XX2), (XX3), (XX4), (XX5), (XX6)\}\end{aligned}$$

1. $$P(\text{Gane}) = \frac{7}{24}$$
2. $$P(CC|\text{gana}) = \frac{6}{8} = \frac{3}{7}$$

Problema 4 *(2 puntos)* El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

$$91; \quad 68; \quad 39; \quad 82; \quad 55; \quad 70; \quad 72; \quad 62; \quad 54; \quad 67$$

1. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio dedicado a escuchar música por un estudiante.
2. Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

1. Se trata de una distribución $N(\mu, 15)$, $n = 10$, $\overline{x} = 66$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (58{,}19707987, 73{,}80292012)$$

2.

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1{,}96\frac{15}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 34{,}5744$$

Luego $n = 35$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2008) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, A y B. Las almazaras A y B venden el aceite a 2000 y 3000 euros por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada almazara para obtener el mínimo coste? Determínese dicho coste mínimo.

Solución:

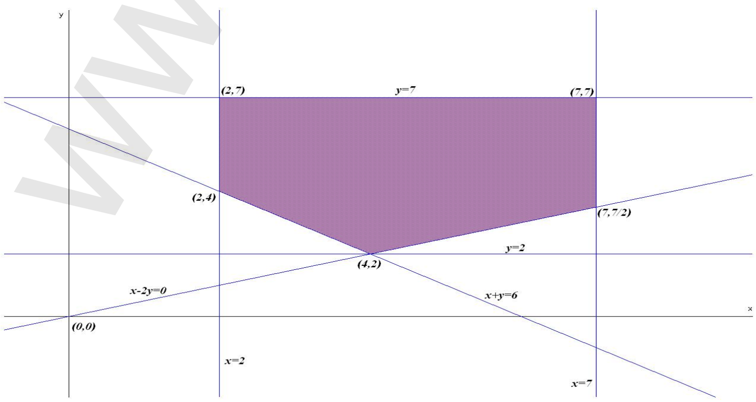
Sea x cantidad de toneladas de A.

Sea y cantidad de toneladas de B.

La función objetivo: $z(x, y) = 2000x + 3000y$

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 2 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 7 \\ x + y \ge 6 \\ x \le 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 7 \\ x + y \ge 6 \\ x - 2y \le 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{lcl} z(4,2) & = & 14000 \\ z(2,4) & = & 16000 \\ z(2,7) & = & 25000 \\ z(7,7) & = & 35000 \\ z(7,7/2) & = & 24500 \end{array}$$

Luego para obtener el mínimo coste se deberá comprar cuatro toneladas a la almazara A y 2 a la almazara B, con un gasto de 14000 euros.

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2+x+2}{x}, \quad x \neq 0$$

1. Determínense las asíntotas de f.
2. Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.
3. Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

1. Asíntotas:

   - Verticales: $x = 0$

   $$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^2+x+2}{x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2+x+2}{x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

   - Horizontales: No Hay

   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+x+2}{x} = \infty$$

   - Oblicuas: $y = mx + n$

   $$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+x+2}{x^2} = 1$$

   $$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+2}{x} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x+2}{x} = 1$$

   $$y = x + 1$$

2.

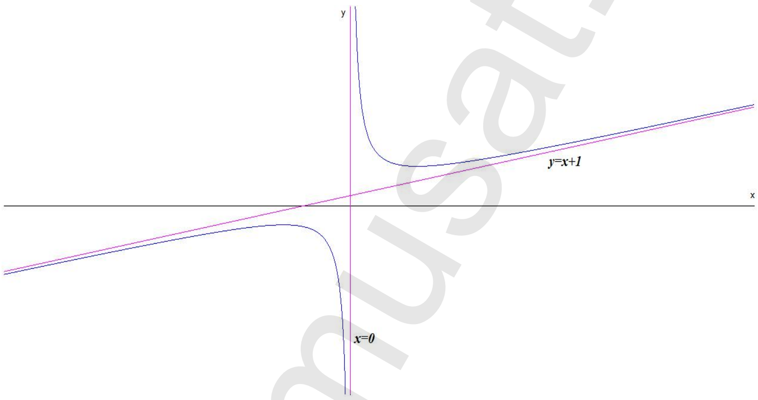
$$f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{2},\ \ x = \sqrt{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

La función decrece en el intervalo: $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$

Presenta un máximo en el punto $(-\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$ y un mínimo en $(\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$



3.

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2+x+2}{x}\,dx = 2\ln(x) + \frac{x^2}{2} + x\Big]_1^2 = \frac{5}{2} + 2\ln 2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A) = \frac{1}{4},\quad P(B) = \frac{1}{3},\quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

1. ¿Son A y B sucesos independientes? Razónese.
2. Calcúlese $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.
Solución:

1.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12} = P(A) \cdot P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

2.

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} =$$

$$\frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

Problema 4 *(2 puntos)* El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo en cierta región, se supone que es una variable aleatoria con una distribución normal con una desviación típica de 1 tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 64 parcelas con una superficie igual a una hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de 6 toneladas.

1. ¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor de 0,5 toneladas, con un nivel de confianza del 98 %? Razónese.

2. ¿Qué tamaño mínimo muestral debe tomarse para que el error de estimación sea menor que 0,5 toneladas con un nivel de confianza del 95 %

Solución:

1.

$$z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325\frac{1}{\sqrt{64}} = 0{,}29$$

El error de estimación es menor de 0.29 toneladas, luego podemos afirmar que, es menor de 0.5 toneladas.

2.

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$0{,}5 = 1{,}96\frac{1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 15{,}3664$$

$$n = 16$$