Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2008

Problema 1 Un club deportivo cuenta con un número de socios que viene dado (en miles de personas) por la función:

$$s(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$$

donde x indica el número de años desde la última remodelación.

a) Hállese el año en el que el club ha tenido el mayor número de socios.

b) El cuarto año se remodeló de nuevo. Indíquese razonadamente si esta remodelación tuvo éxito o no.

Solución:

a)

$$s'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Longrightarrow x = 4, \;\; x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$s'(x)$	$+$	$-$	$+$
$s(x)$	creciente	decreciente	creciente

En $x = 1$ la función presenta un máximo, esto quiere decir que transcurrido un año el club tuvo el mayor número de socios con un total de 37000 socios.

En $x = 4$ la función presenta un mínimo, esto quiere decir que transcurrido cuatro años el club tuvo el menor número de socios con un total de 10000 socios.

b) A partir de los cuatro años, año en el que se produjo el mínimo y de la remodelación, la función es creciente y podemos asegurar que la remodelación fué un éxito.

Problema 2 La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(-1, 0)$ y tiene un máximo en el punto $(0, 4)$. Halla:

a) La función.

b) El mínimo.

c) El punto de Inflexión.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, y tenemos $f(-1) = 0$, $f'(0) = 0$ y $f(0) = 4$:

$$\left\{\begin{array}{l} f(-1) = 0 \Longrightarrow -1 + a - b + c = 0 \\ f(0) = 4 \Longrightarrow c = 4 \\ f'(0) = 0 \Longrightarrow b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{array}\right.$$

La función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función presenta un máximo en el punto $(0, 4)$ y un mínimo en el punto $(2, 0)$

c) $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow$ el punto de inflexión es el $(1, 2)$. Se puede asegurar ésto, ya que $f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$.

Problema 3 Calcular a, b, c y d para que la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1}{2}x & \text{si} & x < 2 \\ 3x - a & \text{si} & 2 \leq x < 3 \\ b & \text{si} & 3 \leq x < 5 \\ -x + c & \text{si} & 5 \leq x < 7 \\ d & \text{si} & 7 \leq x \end{array}\right.$$

sea continua en R. **Solución:**

En $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{1}{2}x = 1 \text{ y } \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (3x - a) = 6 - a$$

$$1 = 6 - a \Longrightarrow a = 5$$

En $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} (3x - a) = 9 - a \text{ y } \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} b = b$$

$$9 - a = b \Longrightarrow b = 4$$

En $x = 5$:

$$\lim_{x\longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 5} b = b \;\text{ y }\; \lim_{x\longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 5}(-x+c) = -5+c$$

$$b = -5 + c \Longrightarrow c = 9$$

En $x = 7$:

$$\lim_{x\longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 7}(-x+c) = -7+c \;\text{ y }\; \lim_{x\longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 7} d = d$$

$$-7 + c = d \Longrightarrow d = 2$$