Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2006

Problema 1 Encontrar todas las matrices de orden dos no nulas que cumplan que

$$AX = XA \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b & 2b \\ -c+d & 2d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a = -a+b \\ -b = 2b \\ a+2c = -c+d \\ b+2d = 2d \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = 0 \\ a = d-3c \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} d-3c & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - AB = C$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - AB = C \Longrightarrow AX = C + AB \Longrightarrow X = A^{-1}(C + AB)$$

$$C + AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C + AB) = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3 - \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_4 + \mathrm{F}_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $B \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -7 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -7 & -8 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -7 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(A) < 3$, buscamos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Concluimos con que el Rango$(A) = 2$.