Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2007

Problema 1 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 4/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ -2X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1 \\ -4/3 & 2 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - B = I$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - B = I \Longrightarrow X = A^{-1}(I + B)$$

$$I + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(I + B) = \begin{pmatrix} -1/5 & -3/5 \\ 2/5 & 6/5 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 + \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 - \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3 + \mathrm{F}_1 \end{bmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $B \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(A) < 3$, buscamos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Concluimos con que el Rango$(A) = 2$.