Examen de Matemáticas II (Marzo 2008)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & mz= & m+2 \\ 2x+ & (m+1)y+ & (m+1)z= & -m \\ (m+2)x+ & 3y+ & (2m+1)z= & 3m+4 \end{array}\right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.
2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & m & m+2 \\ 2 & m+1 & m+1 & -m \\ m+2 & 3 & 2m+1 & 3m+4 \end{array}\right)$$

$$|A|=-(m+2)(m-1)^2=0 \Longrightarrow m=1, \quad m=-2$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq -2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3=$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $m=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Como $F_3=2F_1-F_2$ podemos decir que Rango$(\overline{A})=2=$Rango$(A)<$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y, por tanto, el sistema es Compatible Indeterminado.

Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

A la vista de la matriz se ve que el Rango$(A)=1$ al tener las tres filas iguales, pero Rango$(\overline{A})=2\neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z= & 0 \\ 2x- & y- & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2/3+\lambda \\ y=-2/3+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Tres nadadores de diferentes edades se encuentran en la piscina y el entrenador les comenta que hace cinco años el mayor de ellos tenía el doble de la edad de los otros dos juntos y que dentro de cinco años tendrá la suma de sus edades. El mediano le dice al pequeño que le saca dos años. Calcular las edades de los tres.

Solución:

Sea x los años del pequeño, sea y los años del mediano y sea z los años del mayor.

Hace 5 años: El pequeño tiene $x-5$ años, el mediano tiene $y-5$ años y el mayor $z-5$ años.

Dentro de 5 años: El pequeño tiene $x+5$ años, el mediano tiene $y+5$ años y el mayor $z+5$ años.

$$\left\{\begin{array}{l} 2(x+y-10)=z-5 \\ x+y+10=z+5 \\ y=x+2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 2y- & z= & 15 \\ x+ & y- & z= & -5 \\ -x+ & y & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=9 \\ y=11 \\ z=25 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Calcular:

1. (1 punto). $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$
2. (1 punto). $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}$

Solución:

1.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-5}$$

$$\lambda=\lim_{n\longrightarrow\infty}(1-5n)\cdot\left(\frac{2+n}{1+n}-1\right)=-5$$

2.
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}=$$
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{(\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n})(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}=$$
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n^3+n-3}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}=$$
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2+1/n^2-3/n^3}{(1+5/n)(\sqrt{1+2/n-3/n^4}+\sqrt{1-1/n^3})}=1$$

Problema 4 *(3 puntos)* Sean los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,1,-4)$.

1. (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.
2. (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.
3. (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta
$$r:\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$$

Solución:

1. $\overrightarrow{AB}=(1,1,-4)-(1,0,2)=(0,1,-6)$.
$$P=(1,0,2)+\frac{1}{3}(0,1,-6)=\left(1,\frac{1}{3},0\right)$$
$$Q=(1,0,2)+\frac{2}{3}(0,1,-6)=\left(1,\frac{2}{3},-2\right)$$

2.
$$\pi:y-6z+\lambda=0\Longrightarrow\frac{1}{3}+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-\frac{1}{3}$$
El plano buscado será: $\pi:3y-18z-1=0$

3.
$$r:\left\{\begin{array}{rr}x= & 3-2\lambda\\ y= & \lambda\\ z= & -1+\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow 3\lambda-18(-1+\lambda)-1=0\Longrightarrow\lambda=\frac{17}{15}$$
Luego el plano y la recta se cortan en el punto:
$$\left(3-2\frac{17}{15},\frac{17}{15},-1+\frac{17}{15}\right)=\left(\frac{11}{15},\frac{17}{15},\frac{2}{15}\right)$$

Examen de Matemáticas II (Marzo 2008) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Las trayectorias de dos aviones vienen dadas por las rectas:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

1. Estudie si las trayectorias se cortan, se cruzan o son coincidentes.
2. Calcule la distancia mínima entre ambas trayectorias.
3. Si un observador se encuentra en el punto de coordenadas $O(0,0,0)$, ¿qué trayectoria sigue su mirada en el momento en el que ve coincidir a los dos aviones?.

Solución:

$$r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-1,2) \\ P_{r_1}(1,1,1) \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (-1,1,0) \\ P_{r_2}(1,0,2) \end{cases}$$

1. $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0,-1,1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

2.

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |(-2,-2,0)| = \sqrt{8}$$

$$|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]| = 2$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, u$$

3. Como intersección de dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-1,2) \\ \overrightarrow{PP_{r_1}} = (1,1,1) \\ P(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - y - 2z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{PP_{r_2}} = (1,0,2) \\ P(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x + 2y - z = 0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l} 3x-y-2z=0\\ 2x+2y-z=0\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,3,-2)$, $B(2,2k+1,k)$ y $C(k+1,4,3)$, se pide:

1. (1 punto). Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.
2. (1 punto). Para el valor $k=0$ hallar el área del triángulo ABC.

Solución:

1.
$$\overrightarrow{AB}=(2,2k+1,k)-(1,3,-2)=(1,2k-2,k+2)$$
$$\overrightarrow{AC}=(k+1,4,3)-(1,3,-2)=(k,1,5)$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Longrightarrow k+2k-2+5k+10=0\Longrightarrow k=-1$$

2. Si $k=0$:
$$\overrightarrow{AB}=(1,-2,2),\quad \overrightarrow{AC}=(0,1,5)$$
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 5\end{array}\right||=|(-12,-5,1)|=\frac{\sqrt{170}}{2}\,u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Sean las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & 1\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc} 7 & -3\\ 8 & -3\end{array}\right)$$

1. (1 punto). Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1}=B$.
2. (1 punto). Calcular A^{10}.
3. (1 punto). Hallar todas las matrices M que satisfacen
$$(A-M)(A+M)=A^2-M^2$$

Solución:

1. $AXA^{-1}=B\Longrightarrow X=A^{-1}BA$
$$A^{-1}=\left(\begin{array}{cc} 1 & -1\\ 0 & 1\end{array}\right)\Longrightarrow X=A^{-1}BA=$$
$$\left(\begin{array}{cc} 1 & -1\\ 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 7 & -3\\ 8 & -3\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} -1 & -1\\ 8 & 5\end{array}\right)$$

2.
$$A^1=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} 1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A^n=\begin{pmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$A^{10}=\begin{pmatrix} 1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

3.
$$A^2+AM-MA-M^2=A^2-M^2\Longrightarrow AM=MA$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a+c & b+d\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+b\\ c & c+d\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a+c=a\Longrightarrow c=0\\ b+d=a+b\Longrightarrow a=d\\ c=c\\ d=c+d\Longrightarrow c=0\end{array}\right.$$
La matriz buscada es:
$$M=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

Problema 4 *(3 puntos)*Se considera el sistema de ecuaciones
$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 2\\ -2x+ & y+ & z= & -1\\ (2-2m)x+ & & (2m-2)z= & m-1\end{array}\right.$$

1. Discutirlo para los distintos valores de m.
2. Resuelve los casos compatibles.
3. En cada uno de los casos del primer apartado, dé una interpretación geométrica del sistema.

Solución:

1.
$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 2\\ -2x+ & y+ & z= & -1\\ (2-2m)x+ & & (2m-2)z= & m-1\end{array}\right.$$
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 2-2m & 0 & 2m-2\end{pmatrix}\ \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 1 & -1\\ 2-2m & 0 & 2m-2 & m-1\end{array}\right)$$
$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 2-2m & 0 & 2m-2\end{vmatrix}=4-4m$$
$$4-4m=0\Longrightarrow m=1$$

- Cuando $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$A$ =Rango$\overline{A} = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.
- Cuando $m = 1 \Longrightarrow |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

En conclusión, cuando $m = 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$ =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas, luego en este caso el sistema es Compatible Indeterminado (infinitas soluciones).

2. Calculamos las soluciones:

- Cuando $m = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 2 \\ -2x+ & y+ & z = & -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} & y = & 2 - z \\ -2x+ & y = & -1 - z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

- Cuando $m \neq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 2 \\ -2x+ & y+ & z = & -1 \\ (2-2m)x+ & & -(2-2m)z = & -(1-m) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 2 \\ -2x+ & y+ & z = & -1 \\ 2x+ & & -2z = & -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{array} \right.$$

3.
- Cuando $m \neq 1$ y $m \neq -1 \Longrightarrow$ los tres planos se cortan en un punto
- Cuando $m = 1 \Longrightarrow$ dos planos coinciden y el otro les corta en una recta.