Examen de Matemáticas II (Septiembre 2008)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función;

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

a) (2 puntos). Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) (1 punto). Calcular:

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Solución:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$$

a) - Asíntotas:

   a) Verticales: No Hay

   b) Horizontales:

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0$$

   $$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \infty$$

   La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow \infty$, pero no lo es cuando $x \longrightarrow -\infty$.

   c) Oblicuas: No hay al haber horizontales

- Monotonía:

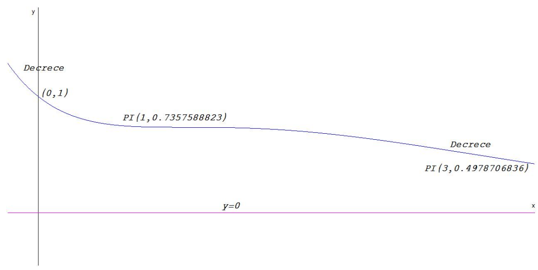
$$f'(x) = \frac{-x^2+2x-1}{e^x} = -\frac{(x-1)^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Además, $f'(x) \le 0$ siempre y, por tanto, la función es siempre decreciente. Esto quiere decir que, la función no tiene ni máximos ni mínimos.

- Curvatura:

$$f''(x) = \frac{x^2-4x+3}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = 3$$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$



- Representación:

b) Se trata de una integral por partes donde $u = x^2 + 1 \Longrightarrow du = 2xdx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x^2+1}{e^{-x}}\,dx = -e^{-x}(x^2+1) + 2\int xe^{-x}dx =$$

(Volviendo a resolver por partes $u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$)

$$= -e^{-x}(x^2+1)+2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\right] = -e^{-x}(x^2+1)-2xe^{-x}-2e^{-x} =$$

$$= -e^{-x}(x^2+2x+3) = -\frac{x^2+2x+3}{e^x}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x}\,dx = -\frac{x^2+2x+3}{e^x}\Bigg]_0^1 = 3 - \frac{6}{e}$$

Problema 2 *(3 puntos)*Dada la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{array}\right)$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos). Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -2(a+1)(a^2+a-1) = 0 \Longrightarrow a = -1, \; a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

En los tres casos el $\text{Rango}(A) = 2$

b) Si $a \neq -1$ y $a \neq \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ la matriz A es invertible.

Si $a = -1$ o $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ la matriz A no es invertible.

Cuando $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(0,1,0)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto). Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P,S) = 2\text{dist}(Q,S)$, donde "dist" significa distancia.

Solución:

a) Sea $R(x,y,z)$:

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \Longrightarrow |(x-1, y-1, z-3)| = |(x, y-1, z)| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} \Longrightarrow x+3z-5 = 0$$

Se trata, por tanto, de un plano.

b) La recta

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{QP} = (1,0,3) \\ Q(0,1,0) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow S(\lambda, 1, 3\lambda)$$

$$|\overrightarrow{PS}| = 2|\overrightarrow{QS}| \Longrightarrow |(\lambda-1, 0, 3\lambda-3)| = 2|(\lambda, 0, 3\lambda)|$$

$$\sqrt{(\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2} = 2\sqrt{\lambda^2 + (3\lambda)^2} \Longrightarrow (\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2 = 4(\lambda^2 + (3\lambda)^2)$$

$$3\lambda^2+2\lambda-1=0\Longrightarrow \lambda=-1,\quad \lambda=\frac{1}{3}$$

Los puntos buscados serán:

$$S_1(-1,1,-3)\ \text{ y }\ S_2\left(\frac{1}{3},1,1\right)$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{3},\quad s:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,2,3)\\ P_r(-1,2,0)\end{array}\right. \quad ,\quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,3,4)\\ P_s(0,1,0)\end{array}\right.$$

$$u_t=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{array}\right|=(-1,2,-1)$$

Obtengo la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(-1,2,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,2,3)\\ P_r(-1,2,0)\end{array}\right. \quad \text{y} \quad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(-1,2,-1)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,3,4)\\ P_s(0,1,0)\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\left|\begin{array}{rrr} -1 & 1 & x+1\\ 2 & 2 & y-2\\ -1 & 3 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow 4x+y-2z+2=0$$

$$\pi_2:\left|\begin{array}{rrr} -1 & 2 & x\\ 2 & 3 & y-1\\ -1 & 4 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow 11x+2y-7z-2=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}4x+y-2z+2=0\\ 11x+2y-7z-2=0\end{array}\right.$$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2008)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos).*

a) (1,5 puntos). Calcular:

$$\int x^3 \ln(x)\, dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) (1,5 puntos). Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$$

<u>*Indicación*</u> : Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Solución:

a) Se trata de una integral por partes, donde hacemos: $u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x}$ y $dv = x^3dx \Longrightarrow v = \dfrac{x^4}{4}$

$$\int x^3 \ln(x)\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} = \frac{4x^4 \ln x - x^4}{16} + C$$

b) $x = e^t - e^{-t} \Longrightarrow dx = (e^t + e^{-t})dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{4+(e^t - e^{-t})^2}}\, dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2+e^{2t}+e^{-2t}}}\, dt =$$

$$\int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{(e^t + e^{-t})^2}}\, dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\, dt = \int dt = t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right) + C$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dados el plano:

$$\pi_1 : x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.

b) (2 puntos). Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1, π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

Solución:

a) Ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

Sustituimos en el plano: $1 + 2\lambda - 1 + 3\lambda - 4\lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = 1$, luego el punto buscado es: $P(3, 2, -4)$.

b) Calculamos un punto $Q(1 + 2\lambda, -1 + 3\lambda, -4\lambda)$ de la recta r que dista $\sqrt{29}$ unidades del punto P calculado anteriormente:

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(-2+2\lambda, -3+3\lambda, 4-4\lambda)| = \sqrt{4(\lambda-1)^2 + 9(\lambda-1)^2 + 16(1-\lambda)^2} =$$

$$\sqrt{29}(\lambda - 1) = \sqrt{29} \Longrightarrow \lambda = 2$$

Luego $Q(5, 5, -8)$ que, estará contenido en el plano que buscamos π_2 cuya ecuación será: $x + y + z = \mu$ por ser paralelo a π_1. Para calcular μ sustituimos el punto Q en el plano π_2 y tenemos

$$\mu = 5 + 5 - 8 = 2 \Longrightarrow \pi_2 : x + y + z = 2$$

La otra solución sería:

$$\sqrt{29}(1 - \lambda) = \sqrt{29} \Longrightarrow \lambda = 0$$

Luego $Q(1, -1, -4)$ que, estará contenido en el plano que buscamos π_2 cuya ecuación será: $x + y + z = \mu$ por ser paralelo a π_1. Para calcular μ sustituimos el punto Q en el plano π_2 y tenemos

$$\mu = 1 - 1 - 4 = -4 \Longrightarrow \pi_2 : x + y + z = -4$$

Problema 3 *(2 puntos)* Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +\ z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +\ z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observando la matriz vemos que, la 1ª columna es igual a la 3ª, y la segunda es igual a la 4ª multiplicada por dos, luego el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 < 4$ nº de incógnitas y se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con $4 - 2 = 2$ grados de libertad. Es decir, necesitaremos dos parámetros para su solución.

Como las dos primeras filas son linealmente independientes el sitema a resolver será:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ \\ y = \dfrac{4 - 3\mu}{2} \\ \\ z = \lambda \\ v = \mu \end{array} \right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Solución:

x: nº de billetes de 50 euros

y: nº de billetes de 20 euros

z: nº de billetes de 10 euros

$$\left\{ \begin{array}{c} 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x + y + z = 225 \\ x + z = 2y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 100 \\ y = 75 \\ z = 50 \end{array} \right.$$