Examen de Matemáticas II (Modelo 2008)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

a) (1 punto). Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.

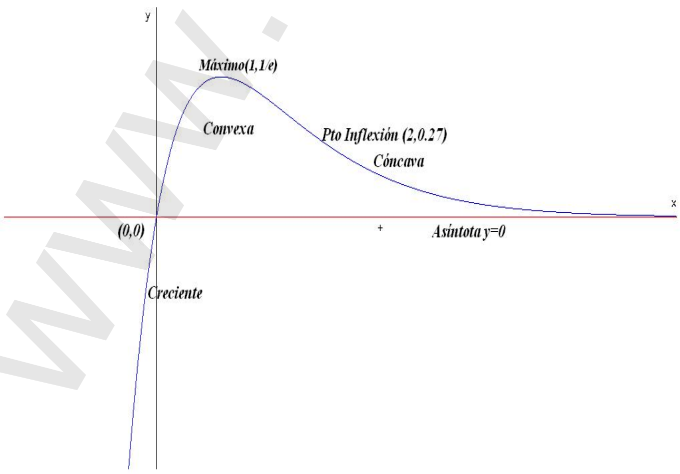
b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: No hay ya que el denominador no se anula nunca.
- Horizontales:
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$
- Oblicuas: No hay al haber horizontales

b) Representación gráfica



$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

Luego hay un máximo en el punto $(1, e^{-1})$

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

Problema 2 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$

b) (1 punto). $\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}$

Solución:

a)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-5}$$

$$\lambda = \lim_{n\longrightarrow\infty}(1-5n)\cdot\left(\frac{2+n}{1+n}-1\right) = -5$$

b)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5} =$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{(\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n})(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})} =$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n^3+n-3}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})} =$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2+1/n^2-3/n^3}{(1+5/n)(\sqrt{1+2/n-3/n^4}+\sqrt{1-1/n^3})} = 1$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & mz = & m+2 \\ 2x+ & (m+1)y+ & (m+1)z = & -m \\ (m+2)x+ & 3y+ & (2m+1)z = & 3m+4 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m+2 \\ 2 & m+1 & m+1 & -m \\ m+2 & 3 & 2m+1 & 3m+4 \end{array} \right)$$

$$|A| = -(m+2)(m-1)^2 = 0 \Longrightarrow m = 1, \quad m = -2$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = 2F_1 - F_2$ podemos decir que Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango$(A) <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y, por tanto, el sistema es Compatible Indeterminado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

A la vista de la matriz se ve que el Rango$(A) = 1$ al tener las tres filas iguales, pero Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & y- & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2/3 + \lambda \\ y = -2/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 4 *(3 puntos)* Sean los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(1, 1, -4)$.

a) (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.

b) (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

c) (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r : \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -4) - (1, 0, 2) = (0, 1, -6)$.

$$P = (1, 0, 2) + \frac{1}{3}(0, 1, -6) = \left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$Q = (1, 0, 2) + \frac{2}{3}(0, 1, -6) = \left(1, \frac{2}{3}, -2\right)$$

b)

$$\pi : y - 6z + \lambda = 0 \Longrightarrow \frac{1}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

El plano buscado será: $\pi : 3y - 18z - 1 = 0$

c)

$$r : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 3 - 2\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & -1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 3\lambda - 18(-1 + \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{17}{15}$$

Luego el plano y la recta se cortan en el punto:

$$\left(3 - 2\frac{17}{15}, \frac{17}{15}, -1 + \frac{17}{15}\right) = \left(\frac{11}{15}, \frac{17}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2008) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos).* Hallar los puntos de la recta $r:\begin{cases} 2x+z=0 \\ x-y+z=3 \end{cases}$ cuya distancia al plano $\pi: 3x+4y=4$ es igual a $\dfrac{1}{3}$.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1,-1,-2),\quad P_r(0,-3,0)\Longrightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-3-\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}$$

$$P(\lambda,-3-\lambda,-2\lambda),\quad \pi: 3x+4y=4$$

$$d(P,\pi)=\frac{|3\lambda+4(-3-\lambda)-4|}{5}=\frac{1}{3}\Longrightarrow |-\lambda-16|=\frac{5}{3}\Longrightarrow |\lambda+16|=\frac{5}{3}$$

Tenemos dos soluciones:

$$\lambda+16=\frac{5}{3}\Longrightarrow \lambda=-\frac{43}{3}\Longrightarrow P\left(-\frac{43}{3},-\frac{52}{3},\frac{86}{3}\right)$$

$$\lambda+16=-\frac{5}{3}\Longrightarrow \lambda=-\frac{53}{3}\Longrightarrow P\left(-\frac{53}{3},-\frac{62}{3},\frac{106}{3}\right)$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,3,-2)$, $B(2,2k+1,k)$ y $C(k+1,4,3)$, se pide:

a) (1 punto). Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.

b) (1 punto). Para el valor $k=0$ hallar el área del triángulo ABC.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{AB}=(2,2k+1,k)-(1,3,-2)=(1,2k-2,k+2)$$

$$\overrightarrow{AC}=(k+1,4,3)-(1,3,-2)=(k,1,5)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Longrightarrow k+2k-2+5k+10=0\Longrightarrow k=-1$$

b) Si $k=0$:

$$\overrightarrow{AB}=(1,-2,2),\quad \overrightarrow{AC}=(0,1,5)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}|=|(-12,-5,1)|=\frac{\sqrt{170}}{2}\,u^2$$

Problema 3 *(3 puntos)* Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.

b) (1 punto). Calcular A^{10}.

c) (1 punto). Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2$$

Solución:

a) $AXA^{-1} = B \Longrightarrow X = A^{-1}BA$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = A^{-1}BA =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^2 + AM - MA - M^2 = A^2 - M^2 \Longrightarrow AM = MA$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a + c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b + d = a + b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = c + d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

La matriz buscada es:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si} \quad |x|<2 \\ 1/x^2 & \text{si} \quad |x|\geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1,5 punto). Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

b) (1,5 punto). Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x=1$, $x=3$.

Solución:

a)

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si} \quad |x|<2 \\ 1/x^2 & \text{si} \quad |x|\geq 2 \end{cases} \Longrightarrow f(x)=\begin{cases} 1/x^2 & \text{si} \quad x\leq -2 \\ ax^2+b & \text{si} \quad -2<x<2 \\ 1/x^2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=-2$:

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2}(ax^2+b)=4a+b$$

$$4a+b=\frac{1}{4}\Longrightarrow 16a+4b=1$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$: (Quedan los mismos resultados de $x=-2$)

La derivada será:

$$f'(x)=\begin{cases} -2/x^3 & \text{si} \quad x\leq -2 \\ 2ax & \text{si} \quad -2<x<2 \\ -2/x^3 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=-2$:

$$f'(-2^-)=\frac{1}{4},\quad f'(-2^+)=-4a$$

$$-4a=\frac{1}{4}\Longrightarrow a=-\frac{1}{16}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=2$: (Quedan los mismos resultados de $x=-2$)

$$4a = -\frac{1}{4} \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}$$

Si $a = -\dfrac{1}{16} \Longrightarrow b = \dfrac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -1/16x^2 + 1/2 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

b) El signo de la función f en el intervalo $[1, 2]$ es siempre positiva, y lo mismo ocurre en el intervalo $[2, 3]$

$$-1/16x^2 + 1/2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

Los íntervalos de integración serán $(1, 2)$ y $(2, 3)$

$$S_1 = \int_1^2 \left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{-x^3}{48} + \frac{x}{2}\Big]_1^2 = \frac{17}{48}$$

$$S_2 = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{x}\Big]_2^3 = \frac{1}{6}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{17}{48} + \frac{1}{6} = \frac{25}{48}\ u^2$$