

Examen de Matemáticas II (Modelo 2008) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

- a) (1 punto). Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.
- b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

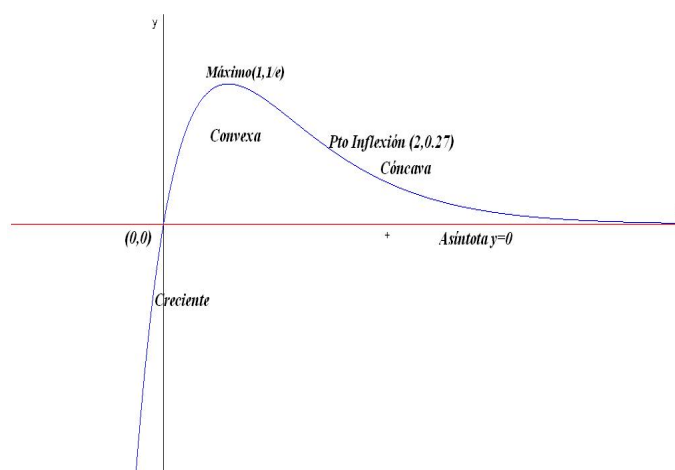
- Verticales: No hay ya que el denominador no se anula nunca.
- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \implies y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \implies \text{No Hay}$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales

b) Representación gráfica



$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} = 0 \implies x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente	Decreciente

Luego hay un máximo en el punto $(1, e^{-1})$

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} = 0 \implies x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	Convexa	Cóncava

Problema 2 (2 puntos) Calcular:

a) (1 punto). $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{1-5n}$

b) (1 punto). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n + 5}$

Solución:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{1-5n} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-5}$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-5n) \cdot \left(\frac{2+n}{1+n} - 1 \right) = -5$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n + 5} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n})(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})}{(n + 5)(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n - 3}{(n + 5)(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/n^2 - 3/n^3}{(1 + 5/n)(\sqrt{1 + 2/n - 3/n^4} + \sqrt{1 - 1/n^3})} &= 1 \end{aligned}$$

Problema 3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + mz = m + 2 \\ 2x + (m+1)y + (m+1)z = -m \\ (m+2)x + 3y + (2m+1)z = 3m + 4 \end{cases}$$

a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m .

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m+2 \\ 2 & m+1 & m+1 & -m \\ m+2 & 3 & 2m+1 & 3m+4 \end{array} \right)$$

$$|A| = -(m+2)(m-1)^2 = 0 \implies m = 1, \quad m = -2$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $m = -2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = 2F_1 - F_2$ podemos decir que $\text{Rango}(\bar{A}) = 2 = \text{Rango}(A) < \text{n}^\circ$ de incógnitas y, por tanto, el sistema es Compatible Indeterminado.

Si $m = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

A la vista de la matriz se ve que el $\text{Rango}(A) = 1$ al tener las tres filas iguales, pero $\text{Rango}(\bar{A}) = 2 \neq \text{Rango}(A) \implies$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).

b)

$$\begin{cases} x+ & y- & 2z = 0 \\ 2x- & y- & z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2/3 + \lambda \\ y = -2/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 4 (3 puntos) Sean los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(1, 1, -4)$.

- a) (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.
- b) (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A , determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB .

c) (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r : \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -4) - (1, 0, 2) = (0, 1, -6)$.

$$P = (1, 0, 2) + \frac{1}{3}(0, 1, -6) = \left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$Q = (1, 0, 2) + \frac{2}{3}(0, 1, -6) = \left(1, \frac{2}{3}, -2\right)$$

b)

$$\pi : y - 6z + \lambda = 0 \implies \frac{1}{3} + \lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{3}$$

El plano buscado será: $\pi : 3y - 18z - 1 = 0$

c)

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \implies 3\lambda - 18(-1 + \lambda) - 1 = 0 \implies \lambda = \frac{17}{15}$$

Luego el plano y la recta se cortan en el punto:

$$\left(3 - 2\frac{17}{15}, \frac{17}{15}, -1 + \frac{17}{15}\right) = \left(\frac{11}{15}, \frac{17}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2008)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos). Hallar los puntos de la recta $r : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$.

Solución:

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2), \quad P_r(0, -3, 0) \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$$P(\lambda, -3 - \lambda, -2\lambda), \quad \pi : 3x + 4y = 4$$

$$d(P, \pi) = \frac{|3\lambda + 4(-3 - \lambda) - 4|}{5} = \frac{1}{3} \implies |-\lambda - 16| = \frac{5}{3} \implies |\lambda + 16| = \frac{5}{3}$$

Tenemos dos soluciones:

$$\lambda + 16 = \frac{5}{3} \implies \lambda = -\frac{43}{3} \implies P\left(-\frac{43}{3}, -\frac{52}{3}, \frac{86}{3}\right)$$

$$\lambda + 16 = -\frac{5}{3} \implies \lambda = -\frac{53}{3} \implies P\left(-\frac{53}{3}, -\frac{62}{3}, \frac{106}{3}\right)$$

Problema 2 (2 puntos) Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2, 2k + 1, k)$ y $C(k + 1, 4, 3)$, se pide:

- a) (1 punto). Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A .
- b) (1 punto). Para el valor $k = 0$ hallar el área del triángulo ABC .

Solución:

a)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2k + 1, k) - (1, 3, -2) = (1, 2k - 2, k + 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (k + 1, 4, 3) - (1, 3, -2) = (k, 1, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \implies k + 2k - 2 + 5k + 10 = 0 \implies k = -1$$

b) Si $k = 0$:

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 5)$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = |(-12, -5, 1)| = \frac{\sqrt{170}}{2} u^2$$

Problema 3 (3 puntos) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto). Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.
 b) (1 punto). Calcular A^{10} .
 c) (1 punto). Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2$$

Solución:

a) $AXA^{-1} = B \implies X = A^{-1}BA$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies X = A^{-1}BA =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^2 + AM - MA - M^2 = A^2 - M^2 \implies AM = MA$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a+c = a \implies c = 0 \\ b+d = a+b \implies a = d \\ c = c \\ d = c+d \implies c = 0 \end{cases}$$

La matriz buscada es:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 4 (3 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

- (1,5 punto). Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo \mathbb{R} .
- (1,5 punto). Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases} \implies f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2 + b & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} (ax^2 + b) = 4a + b \\ 4a + b &= \frac{1}{4} \implies 16a + 4b = 1 \end{aligned}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$: (Quedan los mismos resultados de $x = -2$)

La derivada será:

$$f'(x) = \begin{cases} -2/x^3 & \text{si } x \leq -2 \\ 2ax & \text{si } -2 < x < 2 \\ -2/x^3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = -2$:

$$\begin{aligned} f'(-2^-) &= \frac{1}{4}, \quad f'(-2^+) = -4a \\ -4a &= \frac{1}{4} \implies a = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$: (Quedan los mismos resultados de $x = -2$)

$$4a = -\frac{1}{4} \implies a = -\frac{1}{16}$$

$$\text{Si } a = -\frac{1}{16} \implies b = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ -1/16x^2 + 1/2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- b) El signo de la función f en el intervalo $[1, 2]$ es siempre positiva, y lo mismo ocurre en el intervalo $[2, 3]$

$$-1/16x^2 + 1/2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{8}$$

Los intervalos de integración serán $(1, 2)$ y $(2, 3)$

$$S_1 = \int_1^2 \left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{-x^3}{48} + \frac{x}{2} \right]_1^2 = \frac{17}{48}$$

$$S_2 = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\frac{1}{x} \right]_2^3 = \frac{1}{6}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{17}{48} + \frac{1}{6} = \frac{25}{48} u^2$$