# Examen de Matemáticas II (Junio 2008) Selectividad-Opción A

**Tiempo: 90 minutos**

**Problema 1** *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & ay = & 2 \\ ax- & y = & a+1 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro $a$. Resolverlo cuando la solución sea única.

2. (1 punto). Determinar para qué valor o valores de $a$ el sistema tiene solución en la que $y = 2$.

**Solución:**

1.
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{array}\right), \quad |A| = -1 + a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado (solución única). Su solución sería, aplicando Cramer:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{cc} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{array}\right|}{-1+a^2} = \frac{a+2}{a+1}, \quad y = \frac{\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{array}\right|}{-1+a^2} = -\frac{1}{a+1}$$

Si $a = -1$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 1$, mientras que $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$ ya que el menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{array}\right| = 2 \neq 0$. Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (no tiene solución).

Si $a = 1$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Está claro, que las dos filas son iguales y, por tanto, Rango$(A)$ = 1 =Rango$(\overline{A})$ < nº de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado (infinitas soluciones). Las soluciones, en este caso y aunque no las pida el problema son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$$

2. $$2 = -\frac{1}{a+1} \Longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Cuando $a = 1$ e $y = 2 \Longrightarrow x = 4$, luego las soluciones de $a$ pedidas son $a = 1$ y $a = -\frac{3}{2}$.

**Problema 2** *(3 puntos)*Dadas las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} x - z = 1 \\ x + z = 3 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (1,5 puntos). Discutir la posición relativa de las dos rectas $r$, $s$ según los valores del parámetro $a$.
2. (1,5 puntos). Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas $r$ y $s$.

**Solución:**

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-a,-1,a) \\ P_r(2,0,1) \end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ P_s(1,3,0) \end{array}\right.$$

1. $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,3,-1)$

$$|A| = \left|\begin{array}{rrr} -a & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right| = 4a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Se cruzan.

Si $a = 0$:

$$(A) = \left(\begin{array}{rrr} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

como $\left|\begin{array}{rr} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ se cortan.

2. Si $a = 1$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,-1,1) \\ P_r(2,0,1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ P_s(1,3,0) \end{cases} \quad , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1,3,-1)$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}| = |(0,2,2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

**Problema 3** *(2 puntos)* Estudiar los siguientes límites:

1. (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (e^x - x^2)$

2. (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

**Solución:**

1.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (e^x - x^2) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = \infty$$

ya que:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

2.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{5^x \left(\left(\frac{4}{5}\right)^x + 1\right)}{6^x \left(\left(\frac{3}{6}\right)^x + 1\right)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x + 1}{\left(\frac{3}{6}\right)^x + 1} = 0$$

**Problema 4** *(2 puntos)* Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de $x$.

**Solución:**

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = e^{-2}$$

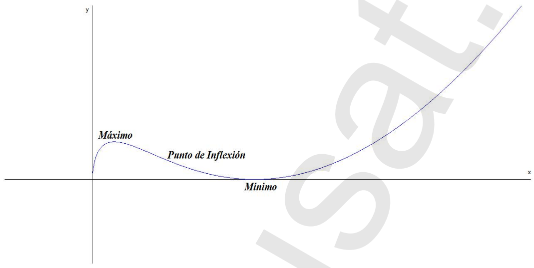
| | $(0, e^{-2})$ | $(e^{-2}, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |

La función presenta un máximo en el punto $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y un mínimo en $(1, 0)$.

$$f''(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow x = e^{-1}$$

| | $(0, e^{-1})$ | $(e^{-1}, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | Convexa $\cap$ | Cóncava $\cup$ |

La función presenta un punto de Inflexión en el $(e^{-1}, e^{-1})$



# Examen de Matemáticas II (Junio 2008)
## Selectividad-Opción B
**Tiempo: 90 minutos**

---

**Problema 1** *(3 puntos).*Dada la siguiente matriz de orden $n$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $A_2$.
2. (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $A_3$.
3. (2 puntos). Calcular el determinante de la matriz $A_5$.

**Solución:**

1. $$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 10$$

2. $$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^2 = 100$$

3. $$A_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^4 = 10000$$

**Problema 2** *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos). Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$

el eje $OX$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

2. (1,5 puntos). Hallar el valor de $c$ para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

**Solución:**

1. $$cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow c^2x^4 + x^2 + c = 0$$

   Esta ecuación no tiene soluciones para $0 < c < 1$, ya que el discriminate $1 - 4c^3 < 0$. ésto quiere decir que, la función no corta el eje $OX$ en el intervalo $[0, 1]$ y, por tanto, los límites de integración del área buscada serán desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

   $$S = \left| \int_0^1 \left( cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) \, dx \right| = \left| \left. \frac{cx^5}{5} + \frac{x^3}{3c} + x \right]_0^1 \right| = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

   $$S(c) = \frac{3c^2 + 15c + 5}{15c}$$

2. $$S'(c) = \frac{3c^2 - 5}{15c^2} = 0 \Longrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

   | | $(0, -\sqrt{5}/3)$ | $(-\sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3)$ | $(\sqrt{5}/3, \infty)$ |
   |---|---|---|---|
   | $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
   | $f(x)$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |

   La función presenta un máximo en $c = -\sqrt{5}/3$ y un mínimo en $c = \sqrt{5}/3$, que es el valor buscado.

**Problema 3** *(2 puntos)* Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$, se pide:

1. (0,5 puntos). Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
2. (1 punto). Hallar la ecuación del plano $\pi$ determinado por los puntos $A$, $B$ y $C$.
3. (0,5 puntos). Hallar la distancia del punto $D$ al plano $\pi$.

**Solución:**

1. Construimos los vectores:

   $$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3) \\ \overrightarrow{AD} = (1, 2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right| = 7 \neq 0 \Longrightarrow$$

   Los cuatro puntos no son coplanarios.

2.
$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3) \\ A(0, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -2 & -3 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$
$$\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

3.
$$d(D, \pi) = \frac{|2 + 6 - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

**Problema 4** *(2 puntos)* Dados el plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

1. (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta $r$ perpendicular al plano $\pi$ que pasa por el punto $P$.
2. (0,5 puntos) Hallar el punto $Q$ intersección de $\pi$ con $r$.
3. (0,5 puntos) Hallar el punto $R$ intersección de $\pi$ con el eje $OY$.
4. (0,5 puntos). Hallar el área del triángulo $PQR$

**Solución:**

1.
$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, 2, -1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right.$$

2.
$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) + 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$
Luego el punto buscado es el $Q(-2, 0, 4)$ (Sustituyendo el valor de $\lambda$ en la recta $r$.

3. Cuando el plano $\pi$ corta al eje $OY$ tendremos que $x = 0$ y $z = 0$, luego $2y + 10 = 0 \Longrightarrow y = -5$. El punto buscado es $R(0, -5, 0)$.

4. Construyo los vectores $\overrightarrow{RQ} = (-2, 5, 4)$ y $\overrightarrow{RP} = (1, 7, 3)$
$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RQ} \times \overrightarrow{RP}| = |\left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{array} \right|| = \frac{1}{2}|(-13, 10, -19)| = \frac{3\sqrt{70}}{2}$$