Examen de Matemáticas II (Junio 2008) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & ay = & 2 \\ ax- & y = & a+1 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

2. (1 punto). Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y = 2$.

Solución:

1. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{array}\right), \quad |A| = -1 + a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado (solución única). Su solución sería, aplicando Cramer:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{cc} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{array}\right|}{-1+a^2} = \frac{a+2}{a+1}, \quad y = \frac{\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{array}\right|}{-1+a^2} = -\frac{1}{a+1}$$

Si $a = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A) = 1$, mientras que Rango$(\overline{A}) = 2$ ya que el menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{array}\right| = 2 \neq 0$. Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (no tiene solución).

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Está claro, que las dos filas son iguales y, por tanto, Rango(A) = 1 =Rango$(\overline{A})$ < n^o de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado (infinitas soluciones). Las soluciones, en este caso y aunque no las pida el problema son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$$

2.
$$2 = -\frac{1}{a+1} \Longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Cuando $a = 1$ e $y = 2 \Longrightarrow x = 4$, luego las soluciones de a pedidas son $a = 1$ y $a = -\frac{3}{2}$.

Problema 2 *(3 puntos)*Dadas las rectas:

$$r : \left\{\begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{array}\right. \qquad s : \left\{\begin{array}{l} x - z = 1 \\ x + z = 3 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (1,5 puntos). Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.
2. (1,5 puntos). Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s.

Solución:

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-a, -1, a) \\ P_r(2, 0, 1) \end{array}\right. \qquad s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{array}\right.$$

1. $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 3, -1)$

$$|A| = \left|\begin{array}{rrr} -a & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right| = 4a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Se cruzan.

Si $a = 0$:

$$(A) = \left(\begin{array}{rrr} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

como $\left|\begin{array}{rr} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ se cortan.

2. Si $a=1$:

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(-1,-1,1)\\ P_r(2,0,1)\end{cases}\qquad s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(1,3,0)\end{cases}\quad,\quad \overrightarrow{P_rP_s}=(-1,3,-1)$$

$$d(r,s)=\frac{|\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}|=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\1&-1&1\\-1&3&-1\end{vmatrix}=4$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\begin{vmatrix}i&j&k\\-1&-1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}|=|(0,2,2)|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Estudiar los siguientes límites:

1. (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(e^x-x^2)$
2. (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}(e^x-x^2)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}e^x=\infty$$

ya que:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{5^x\left(\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right)}{6^x\left(\left(\frac{3}{6}\right)^x+1\right)}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1}{\left(\frac{3}{6}\right)^x+1}=0$$

Problema 4 *(2 puntos)* Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

Solución:

$$f'(x)=(\ln(x))^2+2\ln(x)=0\Longrightarrow x=1,\;\; x=e^{-2}$$

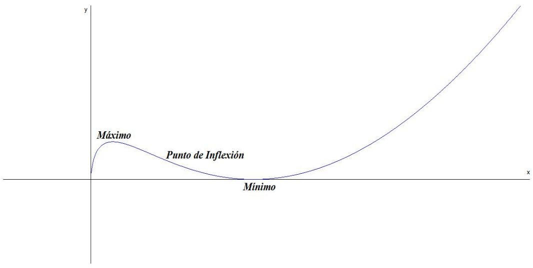
	$(0,e^{-2})$	$(e^{-2},1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un máximo en el punto $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y un mínimo en $(1,0)$.

$$f''(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow x = e^{-1}$$

	$(0,e^{-1})$	(e^{-1},∞)
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

La función presenta un punto de Inflexión en el (e^{-1}, e^{-1})



Examen de Matemáticas II (Junio 2008)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos).*Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_2.
2. (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_3.
3. (2 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_5.

Solución:

1. $$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 10$$

2. $$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^2 = 100$$

3. $$A_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^4 = 10000$$

Problema 2 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos). Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

2. (1,5 puntos). Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

Solución:

1.
$$cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow c^2x^4 + x^2 + c = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones para $0 < c < 1$, ya que el discriminate $1 - 4c^3 < 0$. ésto quiere decir que, la función no corta el eje OX en el intervalo $[0, 1]$ y, por tanto, los límites de integración del área buscada serán desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

$$S = \left| \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) \, dx \right| = \left| \left. \frac{cx^5}{5} + \frac{x^3}{3c} + x \right]_0^1 \right| = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

$$S(c) = \frac{3c^2 + 15c + 5}{15c}$$

2.
$$S'(c) = \frac{3c^2 - 5}{15c^2} = 0 \Longrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

	$(0, -\sqrt{5}/3)$	$(-\sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3)$	$(\sqrt{5}/3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un máximo en $c = -\sqrt{5}/3$ y un mínimo en $c = \sqrt{5}/3$, que es el valor buscado.

Problema 3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$, se pide:

1. (0,5 puntos). Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
2. (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
3. (0,5 puntos). Hallar la distancia del punto D al plano π.

Solución:

1. Construimos los vectores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3) \\ \overrightarrow{AD} = (1, 2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right| = 7 \neq 0 \Longrightarrow$$

Los cuatro puntos no son coplanarios.

2.
$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3) \\ A(0, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -2 & -3 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$
$$\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

3.
$$d(D, \pi) = \frac{|2 + 6 - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

1. (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.
2. (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r.
3. (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.
4. (0,5 puntos). Hallar el área del triángulo PQR

Solución:

1.
$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, 2, -1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right.$$

2.
$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) + 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

   Luego el punto buscado es el $Q(-2, 0, 4)$ (Sustituyendo el valor de λ en la recta r.

3. Cuando el plano π corta al eje OY tendremos que $x = 0$ y $z = 0$, luego $2y + 10 = 0 \Longrightarrow y = -5$. El punto buscado es $R(0, -5, 0)$.

4. Construyo los vectores $\overrightarrow{RQ} = (-2, 5, 4)$ y $\overrightarrow{RP} = (1, 7, 3)$
$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RQ} \times \overrightarrow{RP}| = |\left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{array} \right|| = \frac{1}{2}|(-13, 10, -19)| = \frac{3\sqrt{70}}{2}$$