

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)
Febrero 2008

Problema 1 Se pide:

- a) Calcular el punto simétrico al $P(1, 0, 2)$ respecto de la recta $r : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$, y calcular la distancia entre este punto y r .
- b) Dado el mismo punto anterior, calcular su simétrico respecto al plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, y calcular la distancia desde este punto al plano.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, 2) \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Calculamos un plano perpendicular a la recta $\pi : x + y - z + \lambda = 0$, que contiene al punto $P(1, 0, 2)$, por lo que tenemos $1 - 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = 1$. Luego el plano es $\pi : x + y - z + 1 = 0$. La recta r y el plano π se cortan en un punto Q que será el punto medio entre P y su simétrico P' respecto a la recta r . Calculamos Q :

$$-1 + \lambda + \lambda - 2 + \lambda + 1 = 0 \implies \lambda = \frac{2}{3} \implies Q \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$\frac{P + P'}{2} = Q \implies P' = 2Q - P = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Para calcular la distancia de P a r necesitamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_r P} = (2, 0, 0)$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = |(0, 2, 2)| = \sqrt{8} u^2; \quad |\vec{u}_r| = \sqrt{3}$$

$$d = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} u$$

- b) Calculamos una recta perpendicular al plano y que contenga al punto P

$$t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

calculamos el punto de corte de esta recta con el plano π , y este punto Q será el punto medio entre P y su simétrico P' respecto al plano

$$1 + \lambda + \lambda - 4 + 4\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{3} \implies Q \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$\frac{P + P'}{2} = Q \implies P' = 2Q - P = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

La distancia

$$d(P; \pi) = \frac{|1 + 0 - 4 + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} u$$

Problema 2 Sean los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 : & \quad \lambda x + y = \lambda \\ \pi_2 : & \quad -\lambda x + 2y + \lambda z = 0 \\ \pi_3 : & \quad (\lambda - 1)x + 3y + \lambda z = 1 \end{aligned}$$

Estudiar la posición relativa que ocupan en el espacio para los diferentes valores de λ .

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 2 & \lambda & 0 \\ (\lambda - 1) & 3 & \lambda & 1 \end{array} \right) \quad |A| = \lambda^2 - \lambda = 0 \implies \lambda = 0, \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas y en este caso se trata de un sistema compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.

Si $\lambda = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Las filas primera y segunda son proporcionales y el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

por lo que $\text{Rango}(\bar{A}) = 2$.

Por el mismo menor $\text{Rango}(A) = 2$. Luego se cumple $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Comparando los planos dos a dos tenemos que π_1 y π_2 son coincidentes, mientras que el plano π_3 les corta en una recta.

Si $\lambda = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La tercera fila es la suma de las otras dos y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ por lo que $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Comparando los planos dos a dos tenemos que π_1 , π_2 y π_3 se cortan dos a dos en una recta.

Problema 3 Se pide:

- Encontrar los puntos de la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$, que están a una distancia $\sqrt{6}$ del punto $P(0, 1, 1)$.
- Encontrar el lugar geométrico de los puntos que distan $\sqrt{5}$ del punto $H(-1, 2, 1)$
- Encontrar un plano tangente a la figura del anterior apartado en el punto $Q(1, 3, 1)$.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Para calcularlos nos apoyamos en una esfera de centro $P(0, 1, 1)$ y radio $\sqrt{6}$: $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$. Esta esfera corta a la recta en los siguientes puntos

$$(1+\lambda)^2 + (2\lambda-1)^2 + (1+2\lambda-1)^2 = 6 \implies \lambda = 0,7869736144, \quad \lambda = -0,5647513922$$

Los puntos buscados son

$$P_1(1.787, 1.574, 2.574); \quad P_2(0.435, -1.130, -0.130)$$

- $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5 \implies x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 1 = 0$ se trata de una esfera de centro $H(-1, 2, 1)$ y radio $r = \sqrt{5}$
- Cogemos el vector $\overrightarrow{HQ} = (1, 3, 1) - (-1, 2, 1) = (2, 1, 0)$ El plano tangente $\pi : 2x + y + \lambda = 0 \implies 2 + 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = -5$. El plano buscado es $\pi : 2x + y - 5 = 0$