Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2008

Problema 1 *(3 puntos)*Sea $f : R \longrightarrow R$ y $g : R \longrightarrow R$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^3 + 3x^2, \quad g(x) = x + 3$$

1. Esboza las gráficas de f y de g calculando sus puntos de corte.
2. Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g.

(Andalucía Junio 2007)

Solución:

1. Estudiamos las gráficas

   -
     $$f(x) = x^3 + 3x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x+3) = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = -3$$

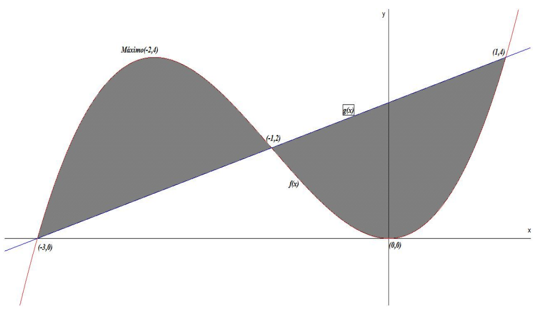
     $$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow 3x(x+2) = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = -2$$

     $$f''(x) = 6x + 6 \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \Longrightarrow (0,0) \text{ Mínimo} \\ f''(-2) = -6 < 0 \Longrightarrow (-2,4) \text{ Máximo} \end{cases}$$

     $$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

     $$f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(-1) = 6 \neq 0 \Longrightarrow (-1,2) \text{ Punto de Inflexión}$$

   - $g(x) = x + 3$ es una recta que pasa por los puntos $(0,3)$ y $(-3,0)$
   - Las dos funciones se cortan en los puntos donde $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 + 3x^2 = x + 3 \Longrightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Longrightarrow (-3,0)$, $(-1,2)$ y $(1,4)$.



2.

$$F(x)=\int(f(x)-g(x))\,dx=\int(x^3+3x^2-x-3)\,dx=\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x$$

$$S_1=\left|\left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{-1}\right|=|4|=4\,u^2$$

$$S_2=\left|\left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-1}^{1}\right|=|-4|=4\,u^2$$

Problema 2 *(2 puntos)*Resolver el siguiente límite

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$$

(Castilla-León Junio 2007)

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=$$

$$\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{\ln(1+x)+2}=\frac{1}{2}$$

Problema 3 *(2 puntos)*Hallar a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} a+x\ln x & \text{si} \quad x>0 \\ b & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{x} & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

sea continua en todo R.

(Castilla-León Junio 2007)

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(\pi x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\pi\cos(\pi x)}{1}=\pi$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0}(a+x\ln x)=a+\lim_{x\longrightarrow 0}(x\ln x)=a+\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=$$

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=a+\lim_{x\longrightarrow 0}(-x)=a$$

$$f(0)=b$$

Luego, para que $f(x)$ sea continua en $x=0$ se tiene que cumplir: $a=b=\pi$.

Problema 4 *(4 puntos)*Se pide:

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

   Calcula a para que $f(x)$ sea continua en $x=2$. Para el valor obtenido de a ¿es $f(x)$ derivable en x=2?

2. Dada la función $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcular los valores de a, b, c para $g(x)$ tenga en el punto (1,-1) un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en $x=0$, sea paralela a la recta $y = 4x$

(Galicia Junio 2007)

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(ax^2+1) = 4a+1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(e^{2-x}+2) = 3$$

$$4a+1 = 3 \Longrightarrow a = \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2+1 & \text{si} \quad x<2 \\ \\ e^{2-x}+2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x<2 \\ -e^{2-x} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(2^-) = -2 \\ f'(2^+) = -1 \end{cases}$$

   Como $f'(2^-) \neq f'(2^+)$ la función no es derivable en $x=2$.

2.

$$\begin{cases} g(1) = -1 \Longrightarrow a+b+c = -1 \\ g'(1) = 0 \Longrightarrow 4a+b = 0 \\ g'(0) = 4 \Longrightarrow b = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{cases}$$

Problema 5 *(2 puntos)*Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\, dx$$

(Navarra Junio 2007)

Solución: Por descomposición polinómica:

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{x^2+x-6}$$

$$\begin{cases} & 1 = A(x+3) + B(x-2) \\ x = -3: & 1 = -5B \Longrightarrow B = -1/5 \\ x = 2: & 1 = 5A \Longrightarrow A = 1/5 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{5}(\ln(x-2) - \ln(x+3))$$

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \frac{1}{5}\ln\frac{x-2}{x+3}$$