

**Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)**  
**Noviembre 2007**

---

---

**Problema 1** Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx - y + z = m \\ 2x + my + z = 2 \\ x + 2y = m \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema para los diferentes valores de  $m$  e interpretarlo geoméricamente.
- b) Resolver el sistema cuando tenga infinitas soluciones.

**Solución:**

a)

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} m & -1 & 2 & m \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & m \end{array} \right), \quad |A| = 6 - 6m = 0 \quad a = 1$$

Si  $m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$  de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado. Los tres planos se cortan en un punto, el sistema tiene solución única.

Si  $m = 1$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Como  $|A| = 0$  y  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$ .

Se observa que la tercera fila  $F_3 = F_2 - F_1$ , luego  $\text{Rango}(A) = 2 < \text{Rango}(\bar{A}) = 3 < \text{n}^\circ$  de incógnitas  $\implies$  Sistema Compatible Indeterminado. Tiene infinitas soluciones y los tres planos se cortan en una recta.

b) Si  $m = 1$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}\lambda \\ y = \frac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Problema 2** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} m & 2 & -m \\ 3 & m & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$  Calcular los valores que debe tomar el parámetro  $m$  de manera que  $A$  sea inversible. Calcular, si es posible, la inversa de esta matriz para  $m = 0$ .

**Solución:**

$$\|A\| = 5(m^2 - 5m + 4) = 0 \implies m = 1, m = 4.$$

$$\text{Si } m \neq 1 \text{ y } m \neq 4 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$$

$$\text{Si } m = 1 \text{ o } m = 4 \implies |A| = 0 \implies \text{no existe } A^{-1}$$

Si  $m = 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/5 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & -3/10 \end{pmatrix}$$

**Problema 3** Hállense las matrices  $A$  cuadradas de orden dos, que verifican la igualdad

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} c & d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a+b \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c = b \\ d = a + b \\ c + c = d \\ b + d = c + d \end{cases} \implies \begin{cases} c = b \\ d = a + c \end{cases} \implies \begin{pmatrix} a & c \\ c & a + c \end{pmatrix}$$

**Problema 4** Resolver la ecuación matricial

$$A^2X - I = B^2X - C$$

$$\text{donde } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solución:**

$$A^2X - I = B^2X - C \implies X = (A^2 - B^2)^{-1}(I - C)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \implies A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - B^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}; \quad I - C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$