Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Octubre 2006

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & -1 \\ m & -1 & m \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 1$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & m+1 & -1 \\ m & -1 & m \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m - 4 = 0 \Longrightarrow m = 2$$

Si $m = 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - B = CX - I$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - B = CX - I \Longrightarrow (A - C)X = B - I \Longrightarrow X = (A - C)^{-1}(B - I)$$

$$(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/3 \\ 1/6 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad B - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - C)^{-1}(B - I) = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/6 \\ -2/3 & 5/6 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2+\mathrm{F}_3+\mathrm{F}_4 \\ \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 \\ \mathrm{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(x{+}3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2-\mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3-\mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_4-\mathrm{C}_1 \end{bmatrix} = (x{+}3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ x & 1-x & 1-x & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$(x{+}3)\begin{vmatrix} 0 & x-1 & 0 \\ x-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 1-x & 1-x \end{vmatrix} = (x{+}3)(x{-}1)^2\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x{+}3)(x{-}1)^3$$

Problema 4 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & m & 2 \\ 2 & m & 2 & 1 \\ 3 & m+2 & 3 & m+2 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 2 & m & 2 \\ 3 & m+2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 3 & m+2 & m+2 \end{vmatrix} = m^3{+}m^2{-}8m{+}6 = 0 \Longrightarrow m = 1,\ m = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & m+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \\ m+2 & 3 & m+2 \end{vmatrix} = -(m^3{+}m^2{-}8m{+}6) \Longrightarrow m = 1,\ m = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2}$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq \dfrac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Cuando $m = 1$ o $m = \dfrac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$, ya que en estos casos el menor $\begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} \neq 0$.