Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2007) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+ & ay+ & z = & 1 \\ & 2y+ & az = & 2 \\ x+ & y+ & z = & 1 \end{cases}$$

1. Discutir el sistema para los distintos valores de a.
2. Resolver el sistema para $a = 3$ y $a = 1$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $a = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La primera fila y la tercera son iguales y como $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

2. Si $a = 3$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & z = & 1 \\ & 2y+ & 3z = & 2 \\ x+ & y+ & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array} \right.$$

Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ & 2y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

1. Especificar el dominio de definición.
2. Estudiar su continuidad.
3. Calcular sus asíntotas si las hubiera.

Solución:

1. $x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 2, \ x = 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = R - \{1, 2\}$
2. En $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = -1$$

Pero $f(1)$ no existe y por tanto se trata de una discontinuidad evitable. (La función tiene un agujero)

En $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = \infty$$

La discontinuidad en este caso es inevitable. (La función pega un salto)

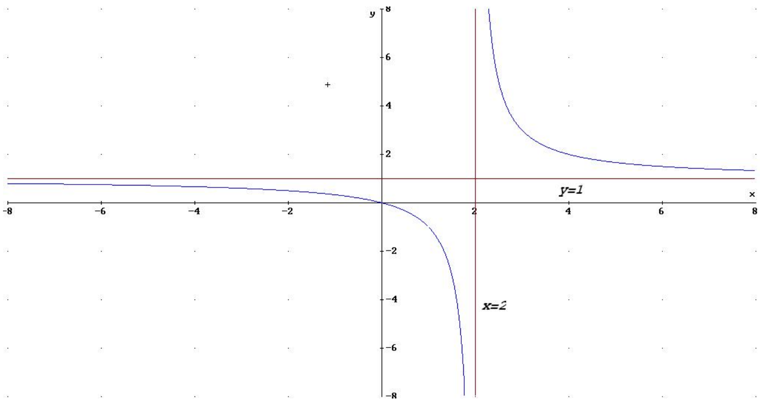
3. Asíntotas:

   - Verticales: $x = 2$ por lo visto anteriormente

- Horizontales: En $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales



Problema 3 *(2 puntos)* En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

1. Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.
2. Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

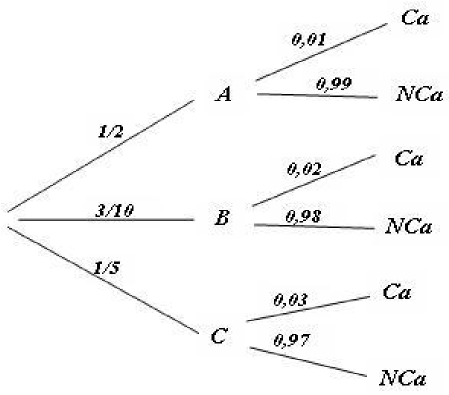
Solución:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{10}, \quad P(C) = \frac{1}{5}$$

1. $$P(Ca) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,03 = 0,017$$

2. $$P(B|Ca) = \frac{P(Ca|B)P(B)}{P(Ca)} = \frac{0,02 \cdot \frac{3}{10}}{0,017} = 0,3529$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que la recaudación diaria de los comercios de un barrio determinado es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de desviación típica 328 euros. Se ha extraído una muestra de 100 comercios de dicho barrio, obteniéndose que la recaudación diaria media asciende a 1248 euros. Calcular:



1. El intervalo de confianza para la recaudación diaria media con un nivel de confianza del 99 %.
2. El tamaño muestral mínimo necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 95 %, un error en la estimación de la recaudación diaria menor de 127 euros.

Solución:

1. Tenemos

$$N(\mu, 328), \quad n = 100, \quad \overline{x} = 1248, \quad z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1163,54; 1332,46)$$

2.

$$E = 127, \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 127 = 1,96\frac{328}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 370,97$$

El tamaño mínimo de la muestra debe de ser n=371

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2007) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Una aerolínea quiere optimizar el número de filas de clase preferente y de clase turista en un avión. La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de 104 m, necesitándose 2 m para instalar una fila de clase preferente y 1,5 m para las de clase turista. La aerolínea precisa instalar al menos 3 filas de clase preferente y que las filas de clase turista sean como mínimo el triple que las de preferente. Los beneficios por fila de clase turista son de 152 euros y de 206 euros para la clase preferente.

¿Cuántas filas de clase preferente y cuántas de clase turista se deben instalar para obtener el beneficio máximo?

Solución:

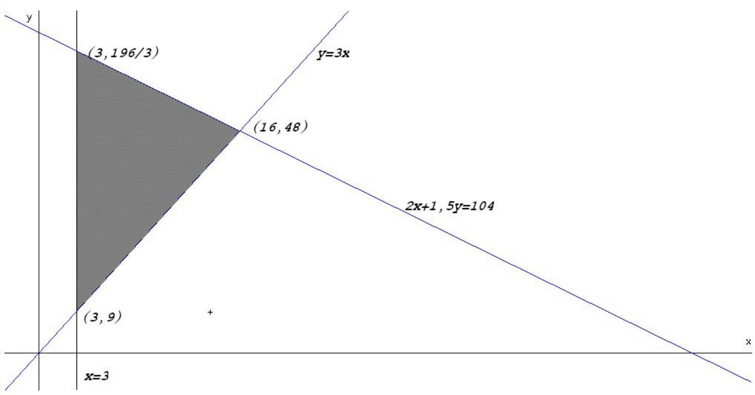
Sea x el número de filas de clase preferente.

Sea y el número de filas de clase turista.

La función objetivo: $z(x,y) = 206x + 152y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + 1,5y \le 104 \\ x \ge 3 \\ y \ge 3x \\ y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 20x + 15y \le 1040 \\ 3x - y \le 0 \\ x \ge 3 \\ y \ge 0 \end{array}\right.$$



$$
\begin{array}{lcr}
z(3,196/3) & = & 10548,6 \\
z(3,9) & = & 1986 \\
z(16,48) & = & 10592
\end{array}
$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán instalar 16 filas de clase preferente y 48 de clase turista, con un beneficio de 10592 euros.

Problema 2 *(3 puntos)* La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes propiedades:

- Pasa por el punto $(0,0)$.
- Tiene un máximo local en el punto $(1,2)$.

Se pide:

1. Obtener el valor de los coeficientes a, b y c.
2. Hallar el área de la región acotada del plano limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje OX y la recta $x = 1$.

Solución:

1. Tenemos:
   - Pasa por el punto $(0,0) \Longrightarrow f(0) = c = 0$
   - Tiene un máximo local en el punto $(1,2) \Longrightarrow f'(1) = 0$ y $f(1) = 2$:

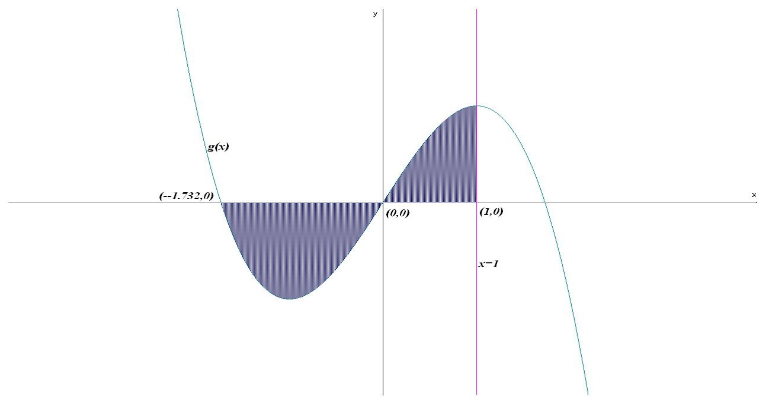
   $$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Longrightarrow 3a + 2b = 0, \text{ y } a + b + c = 2$$

   $$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=2 \\ 3a+2b=0 \\ c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-4 \\ b=6 \\ c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = -4x^3 + 6x^2$$

2. Calculamos los puntos de corte de la función g con el eje $OX \Longrightarrow -x^3 + 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Luego los límites de integración serían los intervalos $[-\sqrt{3}, 0]$ donde la función es negativa y $[0,1]$ donde es positiva:

   $$F(x) = \int (-x^3 + 3x)\, dx = -\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2}$$

   $$S = |F(0) - F(-\sqrt{3})| + |F(1) - F(0)| = \left|-\frac{9}{4}\right| + \left|\frac{5}{4}\right| = \frac{7}{2}\ u^2$$



Problema 3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

$$P(A \cup B), \quad P(A \cap B), \quad P(\overline{A}|B), \quad P(\overline{B}|A)$$

Solución:

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{1}{20} \Longrightarrow P(\overline{A \cup B}) = \frac{19}{20}$
- $P(\overline{A \cup B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{6}{5}$
- $P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/2 - 3/10}{1/2} = \frac{2}{5}$
- $P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3/4 - 3/10}{3/4} = \frac{3}{5}$

Problema 4 *(2 puntos)* El tiempo invertido en cenar por cada cliente de una cadena de restaurantes es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica de 32 minutos. Se quiere estimar la media de dicho tiempo con un error no superior a 10 minutos, y con un nivel de confianza del 95 %.

Determinar el tamaño mínimo muestral necesario para poder llevar a cabo dicha estimación.

Solución:

$$E = 10, \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 10 = 1,96\frac{32}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 39,337984$$

El tamaño mínimo de la muestra debe de ser $n = 40$.