Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2007) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z= & 0 \\ 3x+ & 2y- & 2z= & 3 \\ 2x+ & 2y+ & az= & 8 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los distintos valores de a.
2. Resolver el sistema para $a = 4$.

Solución:

1. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 8a + 14 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{7}{4}$$

   Si $a \neq -\frac{7}{4} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

   Si $a = -\frac{7}{4}$
   $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -7/4 & 8 \end{array}\right)$$
   tenemos que el Rango$(A) = 2$, ya que $\left|\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{array}\right| = 8 \neq 0$, pero
   $$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{array}\right| = 46 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

   En este caso Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A})$, luego el sistema será incompatible.

2. Si $a = 4$ el sistema es compatible determinado:
   $$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z= & 0 \\ 3x+ & 2y- & 2z= & 3 \\ 2x+ & 2y+ & 4z= & 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$$

1. Determinar las asíntotas de la función.
2. Calcular sus máximos y sus mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

Solución:

1. Asíntotas:

   - Verticales: $x = -3$

   $$\lim_{x \longrightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^-} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{36}{0^-}\right] = -\infty$$

   $$\lim_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^+} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{36}{0^+}\right] = +\infty$$

   - Horizontales: No hay

   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

   - Oblicuas: $y = mx + n$

   $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x^2+3x} = 1$$

   $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-3)^2}{x+3} - x\right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-9x+9}{x+3} = -9$$

   $$y = x - 9$$

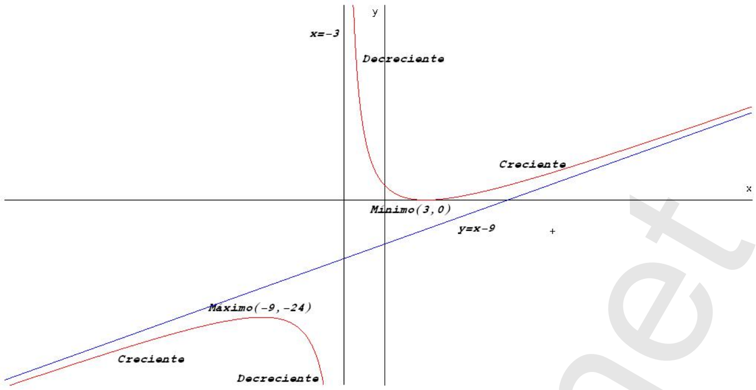
2. $$f'(x) = \frac{x^2+6x-27}{(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3, \;\; x = -9$$

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo: $(-\infty, -9) \cup (3, \infty)$

La función decrece en el intervalo: $(-9, -3) \cup (-3, 3)$

Presenta un máximo en el punto $(-9, -24)$ y un mínimo en $(3, 0)$



Problema 3 *(2 puntos)* Según un cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33 % tiene contratada televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se seleciona un hogar europeo al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:

Lamamos $A = \{\text{Tiene contratado internet}\}$ y $B = \{\text{Tiene contratado TV por cable}\}$

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,33, \quad P(A \cap B) = 0,2$$

1.
$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,33 - 0,2 = 0,13$$

2.
$$P(\text{Ninguno}) = 1 - P(\text{Alguno}) = 1 - P(A \cup B) =$$
$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0,53 = 0,47$$

Problema 4 *(2 puntos)* La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla de Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento.

1. ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

Solución:

1. Tenemos

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(35, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N\left(35, 0{,}5\right)$$

   Media 35 varianza $0{,}5^2 = 0{,}25$

2.

$$P\left(36 \leq \overline{X} \leq 37\right) = P\left(\frac{36-35}{0{,}5} \leq Z \leq \frac{37-35}{0{,}5}\right) = P(2 \leq Z \leq 4) =$$

$$P(Z \leq 4) - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2007) Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titánio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 de titánio y 1 de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 de titánio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de tipo A es de 1500 euros, y por 100 metros de tipo B, 1000 euros.

Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa. Obtener dicho beneficio.

Solución:

Sea x cantidad de cable tipo A.

Sea y cantidad de cable tipo B.

	Cobre	Titánio	Aluminio	Beneficio
A	10	2	1	1500
B	15	1	1	1000
Total	195	20	14	

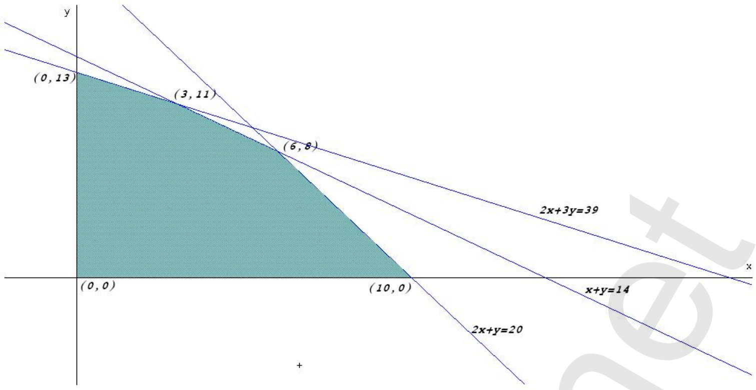
La función objetivo: $z(x, y) = 1500x + 1000y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 10x + 15y \le 195 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 14 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + 3y \le 39 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 14 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} z(0, 13) &=& 13000 \\ z(3, 11) &=& 15500 \\ z(6, 8) &=& 17000 \\ z(10, 0) &=& 15000 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberan fabricar 600 metros del tipo A y 800 metros del tipo B, con un beneficio de 17000 euros.



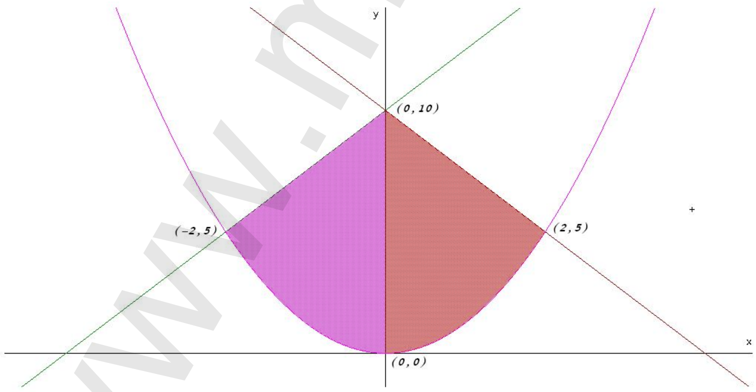
Problema 2 *(3 puntos)* Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2, \quad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20), \quad h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$$

y obtener su área.

Solución:

Dibujamos las gráficas de f que es una párabola con vértice en el punto $(0, 0)$ y de las rectas g y h: Igualando funciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) = h(x)$



obtenemos los límites de integración. Por observación del recinto vemos que es simétrico, bastaría calcular el área encerrada entre $x = 0$ y $x = 2$ y multiplicarla por 2:

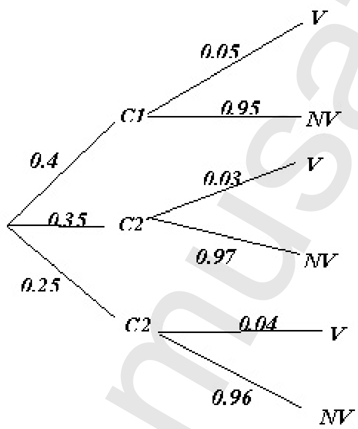
$$\int_0^2 (h(x) - f(x))\, dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}(-5x + 20) - \frac{5}{4}x^2 \right) dx =$$

$$= \left[-5\frac{x^3}{12} + 5\frac{x^2}{4} + 10x \right]_0^2 = \frac{65}{3} \Longrightarrow S = \frac{130}{3}\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Los pianistas de la isla sordina se forman en tres conservatorios, $C1$, $C2$ y $C3$, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.

1. Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.
2. El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio $C1$.

Solución:



1. $P(V) = 0,4 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,04 = 0,0405$
2. $$P(C1|V) = \frac{P(V|C1) \cdot P(C1)}{P(V)} = \frac{0,05 \cdot 0,4}{0,0405} = 0,4938$$

Problema 4 *(2 puntos)* La duración de las rosas conservadas en agua en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 10 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 rosas y se obtienen las siguientes duraciones (en horas):

$$57,\ 49,\ 70,\ 40,\ 45,\ 44,\ 49,\ 32,\ 55,\ 45$$

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de las rosas.

Solución:

Se trata de una distribución $N(\mu, 10)$, $n = 10$, $\overline{x} = 48{,}6$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (42{,}40193578, 54{,}79806421)$$