Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2006

Problema 1 En la lista de precios de una cafetería figura la siguiente información:

- Cuatro cafés y un bocadillo cuestan lo mismo que cinco refrescos.
- Cuatro cafés y tres bocadillos cuestan lo mismo que diez refrescos.
- Dos cafés, un refresco y un bocadillo cuestan $9,50$ euros.

Calcular el precio de un café, de un refresco y de un bocadillo.

Solución:

x es el precio del café.
y es el precio del bocadillo.
z es el precio del refresco.

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+y=5z\\ 4x+3y=10z\\ 2x+y+z=9,50\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} 4x+ & y & & = & 0\\ 4x+ & 3y & & = & 10\\ 2x+ & y & +z = & & 9,50\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1,25\\ y=5\\ z=2\end{array}\right.$$

Problema 2 Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} mx & +2y- & z = & m\\ mx & + & z = & 0\\ x & +6y- & 5z = & 3\end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores de m.

b) Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} m & 2 & -1 & m\\ m & 0 & 1 & 0\\ 1 & 6 & -5 & 3\end{array}\right), \quad |A|=2-2m=0 \quad m=1$$

Si $m\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $m = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & 3 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$

Como
$$|A_1| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2.$

Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado.

b)
$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x & +2y- & z = & 1 \\ x & + & z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m & 5 \end{pmatrix}$$

a) Discutir cuando tiene inverse esta matriz para los diferentes valores de m.

b) Calcular la inversa en el caso de $m = 2$.

Solución:

a)
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m & 5 \end{vmatrix} = -2m^2 + 2 = 0 \Longrightarrow m = 1 \;\; m = -1$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ entonces $|A| \neq 0$ y existe A^{-1}.

Si $m = 1$ o $m = -1$ entonces $|A| = 0$ y no existe A^{-1}.

b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 2/3 & -1/6 \\ 4/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$