Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2006

Problema 1 Encontrar todas las matrices de orden dos no nulas que cumplan que

$$AX = XA \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -2a \\ c+d & -2c \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a-2c = a+b \\ b-2d = -2a \\ a = c+d \\ b = -2c \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = -2c \\ a = c+d \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AB - CX = I$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB - CX = I \Longrightarrow -CX = I - AB \Longrightarrow CX = AB - I \Longrightarrow X = C^{-1}(AB - I)$$

$$AB - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1}(AB - I) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -9/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 - 2\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3 - \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -20$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $B \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -8 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -6 & -8 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -6 & -8 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(A) < 3$, buscamos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Concluimos con que el Rango$(A) = 2$.