Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2006

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 2$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -\frac{1}{2}$$

Si $m = 1$ o $m = -1/2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq -1$ y $m \neq -1/2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 & 6/5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2/5 & 1/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - B = C$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \;\; C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - B = C \Longrightarrow X = A^{-1}(C + B)$$

$$C + B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C + B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 \\ \mathrm{F}_4 \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 \\ \mathrm{C}_3 \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $B \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \; |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(A) < 3$, buscamos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Concluimos con que el Rango$(A) = 2$.