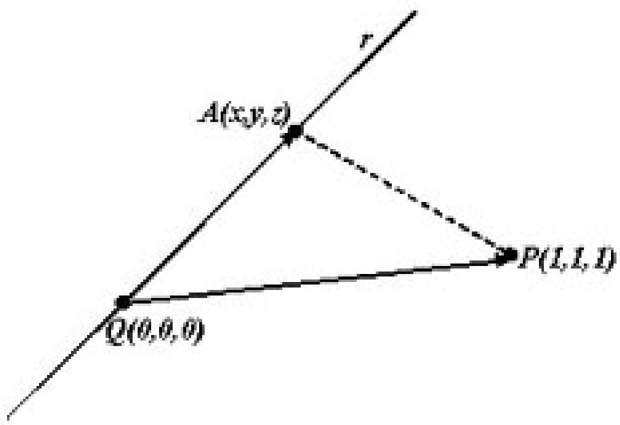
Examen de Matemáticas II (Coordinador 2007) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la recta $\left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right.$ y el punto $P(1,1,1)$. Dado el punto $Q(0,0,0)$ de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1.

Solución:



Un punto $A(x,y,z)$ de la recta sería

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow A(\lambda,\lambda,-\lambda)$$

$$\overrightarrow{QA}=(\lambda,\lambda,-\lambda), \quad \overrightarrow{QP}=(1,1,1)$$

$$S=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right||=\frac{1}{2}|(2\lambda,-2\lambda,0)|=\sqrt{2\lambda^2}=1$$

Luego: $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Problema 2 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos). Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

y es perpendicular al plano $\pi_2 : 2x + y - z = 2$.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (2, 1, -1)$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (2, 1, -1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{rrc} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x-y+z-2 = 0$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{2}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z = & 1 \\ x+ & ky- & kz = & k^2 \\ -x+ & ky- & k^2z = & k^2 \end{array} \right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo para $k = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & k & k^2 & 1 \\ 1 & k & -k & k^2 \\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{array} \right), \quad |A| = 2k^2(k+1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \quad k = -1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ n^o de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El Rango$(A) = 1$, dado que las tres filas son iguales. Sin embargo el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$. Por tanto, Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).
Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz tiene dos primeras filas iguales, luego Rango(A) =Rango$(\overline{A}) <$ nº incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 1 \\ -x- & y- & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 4 *(3 puntos)*

a) (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3)\, dt$$

b) (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Solución:

a) Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que si f es una función integrable si

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \Longrightarrow F'(x) = f(x)$$

Luego $F'(x) = f(x) + x^2 + x^3$

b)

$$m = F'(1) = f(1) + 2 = 3$$

$$F(1) = \int_0^1 (f(t)+t^2+t^3)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt + \int_0^1 t^2\, dt + \int_0^1 t^3\, dt = 1 + \left.\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$

$$y - \frac{19}{4} = 3(x - 1)$$

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2007)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)*.Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

a) (1 punto). Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

b) (1 punto). Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX.

Solución:

a) La pendiente de la recta tangente es $m = f'(a) = -15$

$f'(x) = 12x - 3x^2 \Longrightarrow m = f'(a) = 12a - 3a^2 = -15 \Longrightarrow a = 5, \ \ a = -1$

Como $a > 0 \Longrightarrow$ la solución buscada es $a = 5$ y, por tanto, como $f(5) = 25 \Longrightarrow (5, 25)$ es el punto buscado.

b) Los puntos de corte con el eje OX son

$$6x^2 - x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 6$$

$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3)\, dx = 2x^3 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^6 = 108\, u^2$$

Problema 2 *(2 puntos)* Obtener el valor de k sabiendo que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = e^2$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} (kx+5)\left(\frac{x+3}{x} - 1\right) = 3k$$

Luego $3k = 2 \Longrightarrow k = \dfrac{2}{3}$.

Problema 3 *(3 puntos)* Se consideran el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

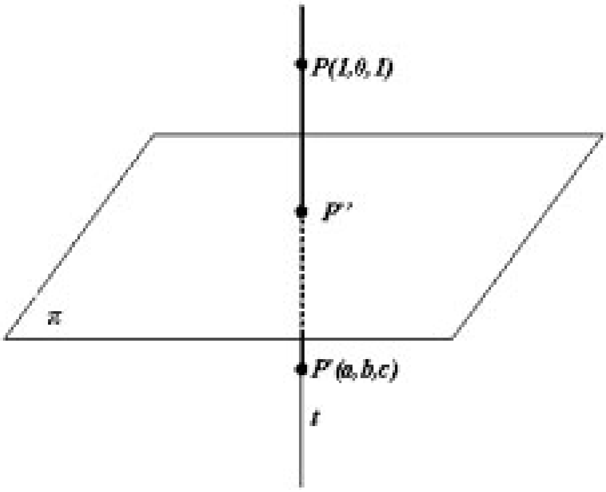
y el plano $\pi : x + y + z = 0$. Se pide:

a) (1,5 puntos). Obtener un punto P', simétrico de P respecto del plano π.

b) (1,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π.

Solución:

a) Sería el siguiente dibujo Calculamos primero el punto P'' corte de la



recta t y el plano π, donde t es una recta perpedicular a π y que pasa por P.

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,1,1)\\ P_t(1,0,1)\end{array}\right. \qquad t:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$$

Sustituyendo este punto en el plano obtenemos el corte

$$1+\lambda+\lambda+1+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-\frac{2}{3}\Longrightarrow P''\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

P'' es el punto medio entre P y P'

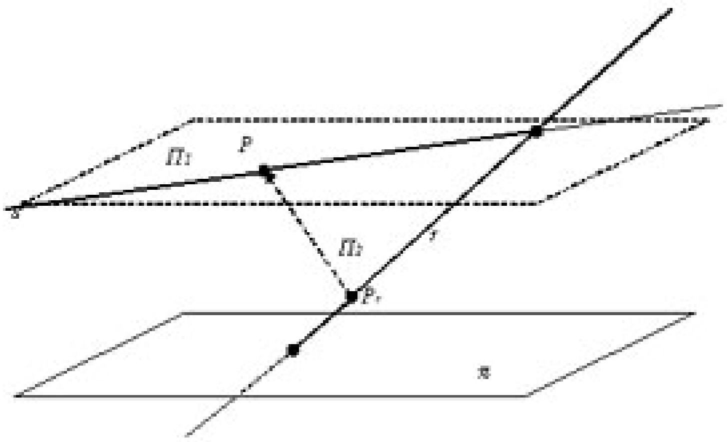
$$\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1+a}{2},\frac{b}{2},\frac{1+c}{2}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-\frac{1}{3}\\ b=-\frac{4}{3}\\ c=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\Longrightarrow P'\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

b) Encontramos la recta como intersección de dos planos:

El plano π_1 es paralelo a π y contiene a P

El plano π_2 contiene a P y a r

Sería el siguiente dibujo



$\pi_1 : x + y + z + \lambda = 0$ y como contiene a $P \Longrightarrow 1 + 0 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow$
$\lambda = -2 \Longrightarrow \pi_1 : x + y + z - 2 = 0$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{PP_r} = (0, 0, -2) \\ P(1, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ -1 & -2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x - y - 2 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{array} \right)$$

a) (1,5 punto). Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

b) (1,5 punto). Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

Solución:

a)

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{array} \right| = 2(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 3$.

Si $\lambda = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales y, por tanto, el Rango$(M) = 1$.

Si $\lambda = -2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(M) = 2$.

b) Si $\lambda = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$