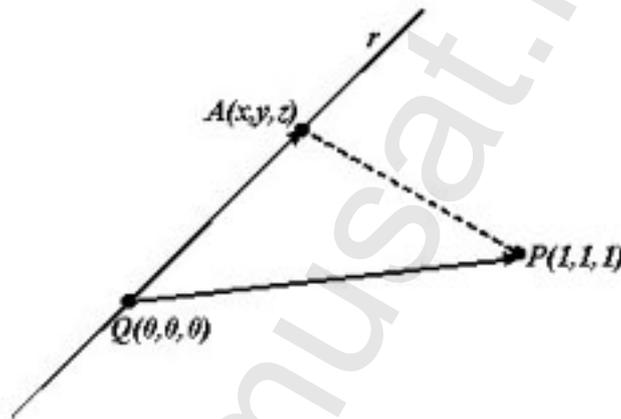


Examen de Matemáticas II (Coordinador 2007)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Se considera la recta $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Dado el punto $Q(0, 0, 0)$ de r , hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A , P y Q tenga área 1.

Solución:



Un punto $A(x, y, z)$ de la recta sería

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow A(\lambda, \lambda, -\lambda)$$

$$\overrightarrow{QA} = (\lambda, \lambda, -\lambda), \quad \overrightarrow{QP} = (1, 1, 1)$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(2\lambda, -2\lambda, 0)| = \sqrt{2\lambda^2} = 1$$

$$\text{Luego: } \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Problema 2 (2 puntos)

- a) (1,5 puntos). Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi_2 : 2x + y - z = 2$.

- b) (0,5 puntos). Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \quad \vec{u}_{\pi_2} = (2, 1, -1)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_{\pi_2} = (2, 1, -1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x-y+z-2=0$$

b)

$$\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{2}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky + k^2z = 1 \\ x + ky - kz = k^2 \\ -x + ky - k^2z = k^2 \end{cases}$$

- a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k .
- b) (1 punto) Resolverlo para $k = -1$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k^2 & 1 \\ 1 & k & -k & k^2 \\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{array} \right), \quad |A| = 2k^2(k+1) = 0 \implies k = 0, \quad k = -1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El $\text{Rango}(A) = 1$, dado que las tres filas son iguales. Sin embargo el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2$. Por tanto, $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible (No tiene Solución). Si $k = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz tiene dos primeras filas iguales, luego $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$ incógnitas \implies Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

b)

$$\begin{cases} x- & y+ & z = & 1 \\ -x- & y- & z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 4 (3 puntos)

a) (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3) dt$$

b) (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t) dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Solución:

a) Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que si f es una función integrable si

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \implies F'(x) = f(x)$$

Luego $F'(x) = f(x) + x^2 + x^3$

b)

$$m = F'(1) = f(1) + 2 = 3$$

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 (f(t) + t^2 + t^3) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^3 dt = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4} \\ y - \frac{19}{4} &= 3(x - 1) \end{aligned}$$

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2007)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos). Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

- a) (1 punto). Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.
- b) (1 punto). Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX .

Solución:

- a) La pendiente de la recta tangente es $m = f'(a) = -15$

$$f'(x) = 12x - 3x^2 \implies m = f'(a) = 12a - 3a^2 = -15 \implies a = 5, \quad a = -1$$

Como $a > 0 \implies$ la solución buscada es $a = 5$ y, por tanto, como $f(5) = 25 \implies (5, 25)$ es el punto buscado.

- b) Los puntos de corte con el eje OX son

$$6x^2 - x^3 = 0 \implies x = 0, \quad x = 6$$

$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx = \left[2x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^6 = 108 \text{ u}^2$$

Problema 2 (2 puntos) Obtener el valor de k sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = e^2$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} (kx+5) \left(\frac{x+3}{x} - 1 \right) = 3k$$

Luego $3k = 2 \implies k = \frac{2}{3}$.

Problema 3 (3 puntos) Se consideran el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta:

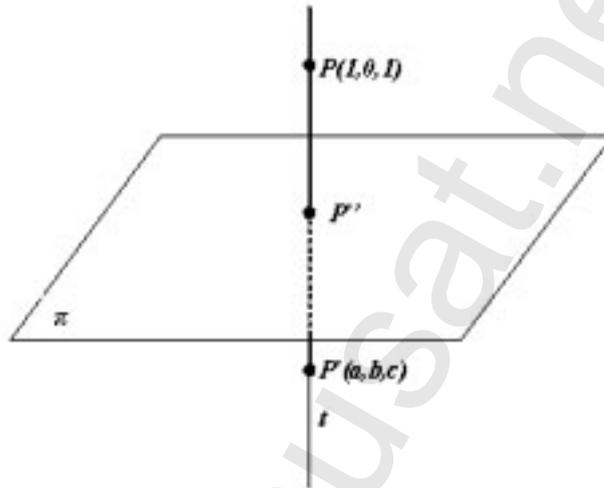
$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

y el plano $\pi : x + y + z = 0$. Se pide:

- a) (1,5 puntos). Obtener un punto P' , simétrico de P respecto del plano π .
- b) (1,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P , corta a la recta r y es paralela al plano π .

Solución:

- a) Sería el siguiente dibujo. Calculamos primero el punto P'' corte de la



recta t y el plano π , donde t es una recta perpendicular a π y que pasa por P .

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, 1) \\ P_t(1, 0, 1) \end{cases} \quad t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo este punto en el plano obtenemos el corte

$$1 + \lambda + \lambda + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{2}{3} \implies P'' \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

P'' es el punto medio entre P y P'

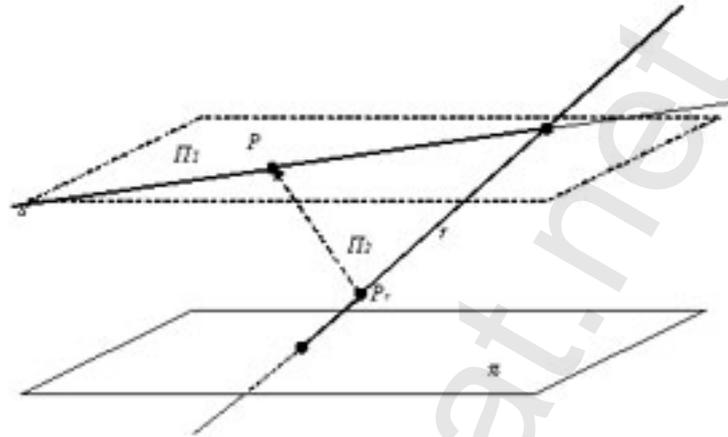
$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1+a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases} \implies P' \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

- b) Encontramos la recta como intersección de dos planos:

El plano π_1 es paralelo a π y contiene a P

El plano π_2 contiene a P y a r

Sería el siguiente dibujo



$$\pi_1 : x + y + z + \lambda = 0 \text{ y como contiene a } P \implies 1 + 0 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2 \implies \pi_1 : x + y + z - 2 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ \vec{PP}_r = (0, 0, -2) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ -1 & -2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x - y - 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 4 (3 puntos) Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1,5 punto). Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ .
- (1,5 punto). Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M . Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0 \implies \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \implies |M| \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 3$.

Si $\lambda = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales y, por tanto, el $\text{Rango}(M) = 1$.

Si $\lambda = -2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$.

b) Si $\lambda = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$