

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2007)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Hallar los puntos de la recta $r : \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

Solución:

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \text{un punto de } r \text{ } P(3 + \lambda, 5 + \lambda, z = -1 + \lambda)$$

$$d(P, \pi) = \frac{|2(3 + \lambda) - (5 + \lambda) + 2(-1 + \lambda) + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = |\lambda| = 1 \implies \lambda = \pm 1$$

Los puntos buscados son:

$$P_1(4, 6, 0), \quad P_2(2, 4, -2)$$

Problema 2 (2 puntos) Sea consideren las rectas:

$$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 2), \quad \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(1, 2, 1)$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 1, 1) \quad t : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Problema 3 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

se pide:

1. (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k .
2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (k+1) & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ (k-1) & -2 & -1 & k+1 \end{array} \right)$$

$$|A| = 2k^2 - 5k + 2 = 0 \implies k = \frac{1}{2}, k = 2$$

- Si $k \neq \frac{1}{2}$ y $k \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Determinado}$.
- $k = \frac{1}{2}$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = -1/2 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Por otra parte

$$\begin{vmatrix} 3/2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ -2 & -1 & 3/2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies \text{Sistema Incompatible}$.

- $k = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Observamos que la tercera fila es la diferencia de la segunda menos la primera, y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado}$.

2.

$$\begin{cases} x+ & 3y+ & 2z = & -1 \\ 2x+ & y+ & z = & 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7/5 - 1/5\lambda \\ y = -4/5 - 3/5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 4 (3 puntos)

1. (1,5 puntos) Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

2. (1,5 puntos) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = 1, \quad x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decrece ↘	Crece ↗	Decrece ↘

Luego la función tiene un mínimo en el punto $(-1, 5/2)$ y un máximo en el $(1, 7/2)$.

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	Convexa ∩	Cóncava ∪	Convexa ∩	Cóncava ∪

Como la función en estos tres puntos cambia de curvatura y hay continuidad, los tres son puntos de inflexión:

$$(0, 3), \quad \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right), \quad \left(-\sqrt{3}, \frac{11\sqrt{3}}{4}\right)$$

2.

$$F(x) = \int \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1} dx = 3x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$F(0) = 4 \implies C = 4 \implies F(x) = 3x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 4$$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2007)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos). Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$XA^2 + BA = A^2 \implies XA^2 = A^2 - BA \implies X = (A^2 - BA)(A^2)^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$(A^2)^{-1} = I_3$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

Luego:

$$X = (A^2 - BA)(A^2)^{-1} = (I_3 - 2I_3)I_3 = -I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.
- (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

Solución:

1. Para que las soluciones del sistema resultante sean las mismas que las del sistema del enunciado necesariamente la ecuación $ax + y + bz = 1$ tiene que ser combinación lineal de las otras dos de esa manera el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ ax + y + bz = 1 \end{cases} \text{ es Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por k y la segunda por l su suma será la ecuación $ax + y + bz = 1$, es decir $F_3 = kF_1 + lF_2$:

$$\begin{cases} a = k + 2l \\ 2k + 3l = 1 \\ -3k + l = b \\ 3k + 5l = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} k = 2 \\ l = -1 \\ a = 0 \\ b = -7 \end{cases}$$

La ecuación sería $y - 7z = 1$

2.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - 11\lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Luego $(1 - 11\lambda) + (1 + 7\lambda) + \lambda = 4 \implies \lambda = -\frac{2}{3}$ y sustituyendo tenemos:

$$x = \frac{25}{3}, \quad y = -\frac{11}{3}, \quad z = \frac{2}{3}$$

Problema 3 (3 puntos) Sean las rectas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad s: \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

- (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .
- (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s .

Solución:

1.

$$\begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u}_s = (3, 1, 0) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases} \quad \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & -8 \end{vmatrix} = 3(3, 1, 1)$$

$$\pi: \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ -1 & 1 & y-1 \\ 2 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = -3x + 5y + 4z - 13 = 0$$

$$\pi: 3x - 5y - 4z + 13 = 0$$

2. Elejimos un punto de la recta s por ejemplo $P_s(2, -1, -2)$

$$d(P_s, \pi) = \frac{|6 + 5 + 8 + 13|}{\sqrt{9 + 25 + 16}} = \frac{32}{\sqrt{50}} = \frac{16\sqrt{2}}{5} u$$

Problema 4 (3 puntos) Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x , de la que se conoce la siguiente información:

- $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.
- $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
- $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

1. (1 punto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
2. (1 punto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.
3. (1 punto) Si $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$

Solución:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$g'(x)$	+	-	+
$g(x)$	Crece ↗	Decrece ↘	Crece ↗

Como la función es continua y derivable en todo R , podemos asegurar que la función tiene un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	Convexa ∩	Cóncava ∪	Convexa ∩

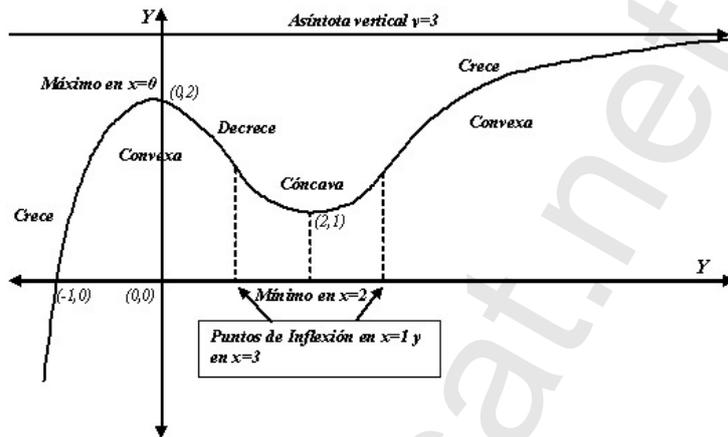
Como la función es continua y derivable en todo R , podemos asegurar que la función tiene dos puntos de inflexión en $x = 1$ y en $x = 3$.

1. Asíntotas:

- Verticales: No hay, ya que la función es continua y derivable en todo R .
- Horizontales: en $y = 3$, ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales

2. Su representación sería:



3. $G(x) = \int_0^x g(t) dt$, como $g(x)$ es continua y derivable podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo y tenemos que $G'(x) = g(x) \implies G'(x_0) = g(x_0) = 0 \implies x_0 = -1$