Examen de Matemáticas II (Junio 2007) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m.

Solución:

$$|A| = m(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 0, \quad m = 2$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $m = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego en este caso el Rango$(A) = 2$.

Si $m = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (dos filas iguales)}$$

Luego en este caso el Rango$(A) = 2$.

Problema 2 *(2 puntos)*Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

Solución:

$$XAX^{-1} = B \Longrightarrow XA = BX$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

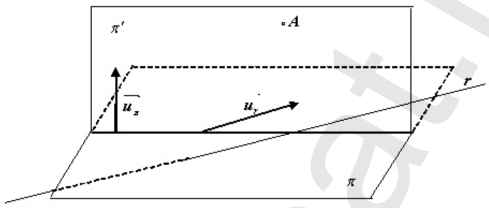
$$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 9b-9d \\ 6a-9c & b-d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 6a-9c=0 \\ b-d=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b=d \\ c=2/3a \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2/3a & b \end{pmatrix}, \quad \text{p.e } X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dados el punto $A(1,-2,-3)$, la recta $r: \left\{\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ y el plano $\pi: x-2y-3z+1=0$, se pide:

1. (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.
2. (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

Solución:

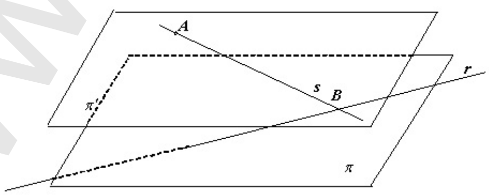


1.

$$r: \left\{\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,0) \\ P_r(-1,0,0) \end{array}\right.$$

$$\pi: x-2y-3z+1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=(1,-2,-3)$$

$$\pi': \left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & y+2 \\ 0 & 3 & z+3 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \pi': 3x+3y-z=0$$



2. Construyo un plano π' paralelo a π que contenga a A:

$$x-2y-3z+\lambda=0 \Longrightarrow 1+4+9+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-14$$

$$\pi': x-2y-3z-14=0$$

Corto con este plano a la recta r y obtengo el punto B:

$$-1-\lambda-2\lambda-14=0 \Longrightarrow \lambda=-5 \Longrightarrow B\,(4,-5,0)$$

La recta que buscamos pasa por A y B:

$$\overrightarrow{AB}=(3,-3,3)=3(1,-1,1)$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(1,-2,-3)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=-3+\lambda\end{array}\right.$$

Problema 4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x)=x^2+m$, donde $m>0$ es una constante.

1. (1,5 puntos) Para cada valor de m hallar el valor de $a>0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a,f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

2. (1,5 puntos) Hallar el valor de m para que la recta $y=x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Solución:

1. $(a,f(a))=(a,a^2+m)$, $f'(x)=2x \Longrightarrow f'(a)=2a$. Luego la recta tangente sería: $y-a^2-m=2a(x-a)$. Si imponemos que pase por el punto $(0,0) \Longrightarrow -a^2-m=-2a^2 \Longrightarrow a=\sqrt{m}$ (la solución negativa no vale).

2. La recta $y=x$ tiene de pendiente $1 \Longrightarrow f'(a)=2a=1 \Longrightarrow a=\dfrac{1}{2}$, luego el punto de tangencia es el $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, es decir, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+m=\frac{1}{2} \Longrightarrow m=\frac{1}{4}$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2007) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)*.Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-12}{x^2+4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Solución:

$$\frac{x^2-12}{x^2+4} = 0 \Longrightarrow x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$S = \left| \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2-12}{x^2+4}\, dx \right|$$

$$F(x) = \int \frac{x^2-12}{x^2+4}\, dx = \int \left(1 - 16\frac{1}{x^2+4}\right) dx = x - 16 \int \frac{1}{x^2+4}\, dx =$$

$$x - 16 \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \right) dx = x - 4 \int \frac{2}{t^2+1}\, dt = x - 8\arctan t = x - 8\arctan \frac{x}{2}$$

$$S = |F(2\sqrt{3}) - F(-2\sqrt{3})| = \left| \frac{4(3\sqrt{3} - 4\pi)}{3} \right| = |-9,8269| = 9,8269\ u^2$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = R - \{2\}$

Monotonía: La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en el intevalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$. Asíntotas:

- Verticales:
  Si $x < 0$ no hay
  Si $x \geq 0 \Longrightarrow x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

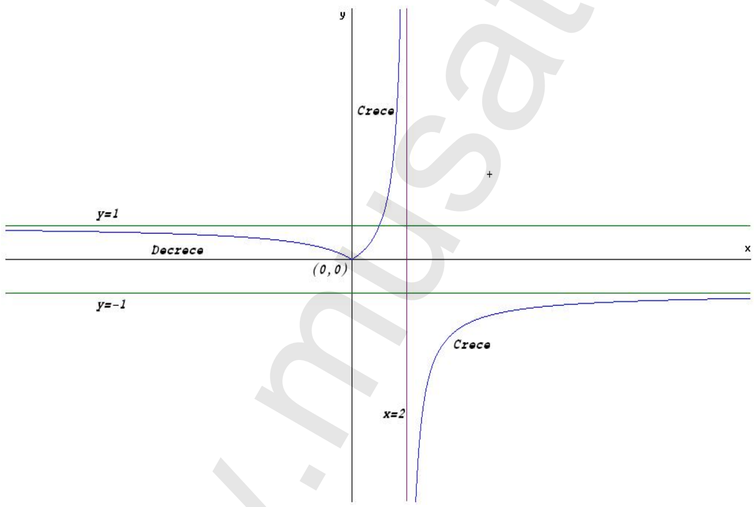
- Horizontales:
  Si $x < 0 \Longrightarrow y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x}{2-x} = 1$$

  Si $x \geq 0 \Longrightarrow y = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{2-x} = -1$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales



Problema 3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

2. (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

Solución:

1.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a-c=0 \\ b-c=0 \end{cases}$$

Las condición que debería de cumplir sería $a = b = c$

2.

$$B^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 & 0 \\ 2^1 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(3 puntos)* Sean los puntos

$$A(\lambda, 2, \lambda), \quad B(2, -\lambda, 0), \quad C(\lambda, 0, \lambda + 2)$$

1. (1 punto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?

2. (1 punto) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

3. (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = -2(\lambda^2+2\lambda+4) \neq 0 \text{ Siempre} \Longrightarrow \text{No están alineados}$$

2.
$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2-\lambda,-\lambda-2,-\lambda)\\ \overrightarrow{AC}=(0,-2,2)\\ \overrightarrow{BC}=(\lambda-2,\lambda,\lambda+2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3\lambda^2+8}\\ |\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}\\ |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3\lambda^2+8}\end{array}\right.$$

El triángulo que forman los puntos tiene dos lados iguales y otro desigual, se trata, por tanto, de un triángulo isósceles.

3.
$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,-2,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,-2,2)\\ A(0,2,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=(1,-1,0)\\ \overrightarrow{v}=(0,-1,1)\\ P(0,2,0)\end{array}\right.$$

$$\pi:\left|\begin{array}{ccc}1 & 0 & x\\ -1 & -1 & y-2\\ 0 & 1 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: x+y+z-2=0$$

$$d(O,\pi)=\frac{|-2|}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ u^2$$