

**Examen de Matemáticas II (Junio 2007)**  
**Selectividad-Opción A**

**Tiempo: 90 minutos**

---

---

**Problema 1** (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz  $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$  según los valores del parámetro  $m$ .

**Solución:**

$$|A| = m(m-2) = 0 \implies m = 0, \quad m = 2$$

Si  $m \neq 0$  y  $m \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$ .

Si  $m = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego en este caso el  $\text{Rango}(A) = 2$ .

Si  $m = 2$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (dos filas iguales)}$$

Luego en este caso el  $\text{Rango}(A) = 2$ .

**Problema 2** (2 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz  $X$  tal que  $XAX^{-1} = B$

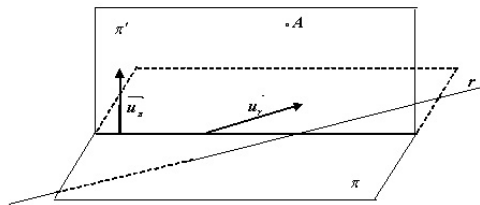
**Solución:**

$$\begin{aligned} XAX^{-1} = B &\implies XA = BX \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \\ \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8a - 9c & 9b - 9d \\ 6a - 9c & b - d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 6a - 9c = 0 \\ b - d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b = d \\ c = 2/3a \end{cases} \\ X &= \begin{pmatrix} a & b \\ 2/3a & b \end{pmatrix}, \quad \text{p.e. } X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Problema 3** (3 puntos) Dados el punto  $A(1, -2, -3)$ , la recta  $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$ , se pide:

- (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por  $A$ , es paralelo a  $r$  y perpendicular a  $\pi$ .
- (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por  $A$ , corta a  $r$  y es paralela a  $\pi$ .

**Solución:**

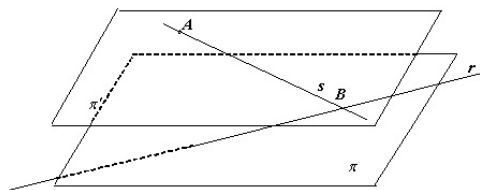


1.

$$r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 0) \\ P_r(-1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0 \implies \vec{u}_\pi = (1, -2, -3)$$

$$\pi' : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & y+2 \\ 0 & 3 & z+3 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi' : 3x + 3y - z = 0$$



2. Construyo un plano  $\pi'$  paralelo a  $\pi$  que contenga a  $A$ :

$$x - 2y - 3z + \lambda = 0 \implies 1 + 4 + 9 + \lambda = 0 \implies \lambda = -14$$

$$\pi' : x - 2y - 3z - 14 = 0$$

Corto con este plano a la recta  $r$  y obtengo el punto  $B$ :

$$-1 - \lambda - 2\lambda - 14 = 0 \implies \lambda = -5 \implies B(4, -5, 0)$$

La recta que buscamos pasa por  $A$  y  $B$ :

$$\overrightarrow{AB} = (3, -3, 3) = 3(1, -1, 1)$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ P_s(1, -2, -3) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

**Problema 4** (3 puntos) Se considera la función  $f(x) = x^2 + m$ , donde  $m > 0$  es una constante.

- (1,5 puntos) Para cada valor de  $m$  hallar el valor de  $a > 0$  tal que la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  pase por el origen de coordenadas.
- (1,5 puntos) Hallar el valor de  $m$  para que la recta  $y = x$  sea tangente a la gráfica de  $f(x)$ .

**Solución:**

- $(a, f(a)) = (a, a^2 + m)$ ,  $f'(x) = 2x \implies f'(a) = 2a$ . Luego la recta tangente sería:  $y - a^2 - m = 2a(x - a)$ . Si imponemos que pase por el punto  $(0, 0) \implies -a^2 - m = -2a^2 \implies a = \sqrt{m}$  (la solución negativa no vale).
- La recta  $y = x$  tiene de pendiente 1  $\implies f'(a) = 2a = 1 \implies a = \frac{1}{2}$ , luego el punto de tangencia es el  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , es decir,  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + m = \frac{1}{2} \implies m = \frac{1}{4}$$

**Examen de Matemáticas II (Junio 2007)**  
**Selectividad-Opción B**

**Tiempo: 90 minutos**

---

---

**Problema 1** (2 puntos). Dada la función  $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$  calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

**Solución:**

$$\frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} = 0 \implies x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$S = \left| \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} dx \right|$$

$$F(x) = \int \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} dx = \int \left( 1 - 16 \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx = x - 16 \int \frac{1}{x^2 + 4} dx =$$
$$x - 16 \int \frac{1}{4 \left( \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 \right)} dx = x - 4 \int \frac{2}{t^2 + 1} dt = x - 8 \arctan t = x - 8 \arctan \frac{x}{2}$$

$$S = |F(2\sqrt{3}) - F(-2\sqrt{3})| = \left| \frac{4(3\sqrt{3} - 4\pi)}{3} \right| = |-9,8269| = 9,8269 u^2$$

**Problema 2** (2 puntos) Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

**Solución:**

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x} = \begin{cases} -\frac{x}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Monotonía: La función es decreciente en el intervalo  $(-\infty, 0)$  y es creciente en el intervalo  $(0, 2) \cup (2, \infty)$ . Asíntotas:

■ Verticales:

Si  $x < 0$  no hay

Si  $x \geq 0 \implies x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = \left[ \frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = \left[ \frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

■ Horizontales:

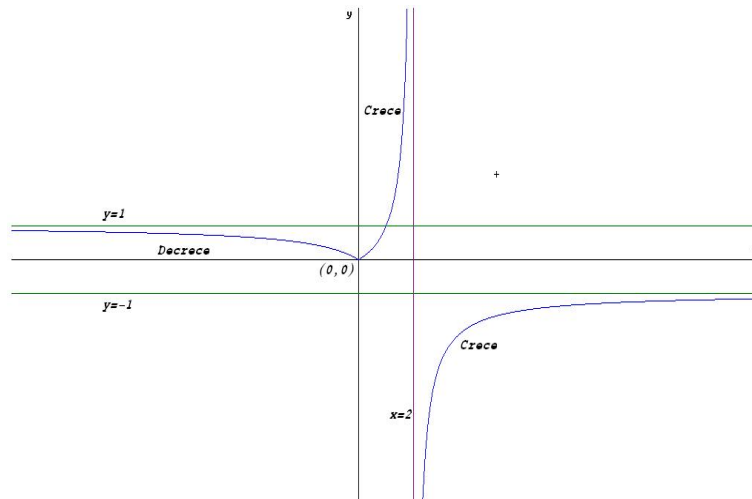
Si  $x < 0 \implies y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2-x} = 1$$

Si  $x \geq 0 \implies y = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2-x} = -1$$

■ Oblicuas: No hay al haber horizontales



**Problema 3** (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que se verifique  $AB = BA$ .
- (1,5 puntos) Para  $a = b = c = 1$ , calcular  $B^{10}$ .

**Solución:**

$$1. \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a-c=0 \\ b-c=0 \end{cases}$$

Las condición que debería de cumplir sería  $a = b = c$

$$2. \quad B^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 & 0 \\ 2^1 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Problema 4** (3 puntos) Sean los puntos

$$A(\lambda, 2, \lambda), \quad B(2, -\lambda, 0), \quad C(\lambda, 0, \lambda + 2)$$

1. (1 punto) ¿Existe algún valor de  $\lambda$  para el que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados?
2. (1 punto) Comprobar que si  $A$ ,  $B$  y  $C$  no están alineados el triángulo que forman es isósceles.
3. (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo  $ABC$  para el valor  $\lambda = 0$  y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

**Solución:**

$$1. \quad \begin{vmatrix} \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = -2(\lambda^2 + 2\lambda + 4) \neq 0 \text{ Siempre} \implies \text{No están alineados}$$

2.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2 - \lambda, -\lambda - 2, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \\ \overrightarrow{BC} = (\lambda - 2, \lambda, \lambda + 2) \end{cases} \implies \begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \\ |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \end{cases}$$

El triángulo que forman los puntos tiene dos lados iguales y otro desigual, se trata, por tanto, de un triángulo isósceles.

3.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, -2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \\ A(0, 2, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{u} = (1, -1, 0) \\ \vec{v} = (0, -1, 1) \\ P(0, 2, 0) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & -1 & y - 2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x + y + z - 2 = 0$$

$$d(O, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} u^2$$