Examen de Matemáticas 2^{o}Bachillerato(CN)

Noviembre 2006

Problema 1 En el año 1834 Mariano José de Larra escribió la obra "El Doncel Don Enrique el Doliente"y era ocho años mayor que un desconocido José Zorrilla. En el año de su suicidio se dio a conocer el joven escritor José Zorrilla, entre los dos sumaban 48 años. Siete años más tarde Zorrilla escribe "Don Juan Tenorio", y en ese momento tiene dos años más de los que tenía Larra cuando escribió "El Doncel Don Enrique el Doliente". Calcular el año de nacimiento de ambos escritores.

Los resultados deben de ser explicados por procedimientos matemáticos, no se tendrán en cuenta aquellos, que derivados de los conocimientos de Literatura, podamos obtener.

Solución:

Sea x el año de nacimiento de Larra, sea y el año de nacimiento de Zorrilla y sea z el año en el aque murió Larra.

En el año 1834: Larra tiene $1834 - x$ años y Zorrilla tiene $1834 - y$ años.

En el año z: Larra tiene $z - x$ años y Zorrilla tiene $z - y$ años.

En el año $z + 7$: Zorrilla tiene $z - y + 7$ años.

$$\left\{\begin{array}{l} 1834 - x = 1834 - y + 8 \\ (z - x) + (z - y) = 48 \\ z - y + 7 = 1834 - x + 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcrr} x - y & & = & -8 \\ x + y & -2z & = & -48 \\ x - y & +z & = & 1829 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1809 \\ y = 1817 \\ z = 1837 \end{array}\right.$$

Problema 2 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z = 3 \\ mx- & y+ & z = 2 \\ x+ & my- & z = 0 \end{array}\right.$$

a) Resolverlo para $m = 1$.

b) Discutirlo para los distintos valores de m.

c) Decidir la posición de estos planos en función de los valores de m.

Solución:

a) Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & - & z = 3 \\ x- & y+ & z = 2 \\ x+ & y- & z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z = 3 \\ mx- & y+ & z = 2 \\ x+ & my- & z = 0 \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m(m+1)$$

$$-m(m+1) = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$$

- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$A$ =Rango$\overline{A} = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

- Cuando $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

El menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$

En conclusión, cuando $m = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m = -1 \Longrightarrow |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

El menor $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$

En conclusión, cuando $m = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\overline{A}) = 3$, luego en este caso también el sistema es incompatible.

c)
- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1 \Longrightarrow$ los tres planos se cortan en un punto
- Cuando $m = 0 \Longrightarrow$ los tres planos se cortan dos a dos sin tener puntos comunes a los tres.
- Cuando $m = -1 \Longrightarrow$ los tres planos se cortan dos a dos sin tener puntos comunes a los tres.

Problema 3 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real λ definimos $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

a) Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.

b) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ.

Solución:

a) $B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$|B| = 0 \Longrightarrow (2-\lambda)\cdot(-2-\lambda) - (-3) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$

b)
- Si $\lambda \neq \pm 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$ y, como el sistema es homogeneo, podemos concluir con que el sistema es Compatible Determinado. La única solución sería la trivial: $x = y = 0$.
- Si $\lambda = 1 : B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(B) = 1$ El sistema sería compatible indeterminado.

  $x - 3y = 0 \Longrightarrow x = 3y$ Las soluciones serían de la forma: $\begin{cases} x = & 3t \\ y = & t \end{cases}$

- Si $\lambda = -1 : B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$Rango$(B) = 1$ El sistema sería compatible indeterminado.

  $3x - 3y = 0 \Longrightarrow x = y$ Las soluciones serían de la forma: $\left\{ \begin{array}{ll} x = & t \\ y = & t \end{array} \right.$