Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Octubre 2006

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-2 & 1 \\ m & -1 & m \\ 2 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 2$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & m-2 & 1 \\ m & -1 & m \\ 2 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = -(m-1)^3 = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Si $m = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX + BX = I$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX + BX = I \Longrightarrow (A+B)X = I \Longrightarrow X = (A+B)^{-1}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/13 & 1/13 \\ -1/13 & 4/13 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular los valores de x para los que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x-1 & 1 & x \\ x-1 & x & x-1 & 1 \\ x & 1 & x-1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x-1 & 1 & x \\ x-1 & x & x-1 & 1 \\ x & 1 & x-1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 - \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{C}_4 - \mathrm{F}_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1-x & 0 \\ x-1 & 1 & 0 & x-2 \\ x & 1-x & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & x-2 \\ 1-x & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(x-2) \begin{vmatrix} -1 & 1-x \\ 1-x & -1 \end{vmatrix} = -x(x-2)^2 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 2$$

Problema 4 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & a+1 \\ 1 & a & -a & a+1 \\ 1 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de a.

Solución:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -a \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = -1$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a & -1 & a+1 \\ 1 & -a & a+1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-1)^2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = -1$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a+1 \\ a & -a & a+1 \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = (a+1)(a-1)^2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = -1$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$. Los valores que anulan los cuatro determinantes son $a = 1, \ \ a = -1$, para cualquier otro valor de a siempre hay alguno de ellos distinto de cero.

Cuando $a = 1$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde podemos encontrar un menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Luego cuando $a = 1 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$.

Cuando $a = -1$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde podemos encontrar un menor

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Luego cuando $a = -1 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$.