Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coordinador2006) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Sea el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & (a+1)z = & 9 \\ 3x- & 2y+ & z = & 20a \\ x+ & y+ & 2az = & 9 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro a.
2. Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.
3. Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20a \\ 1 & 1 & 2a & 9 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -5a+5 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =n^o de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $a = 1$ tenemos que el Rango$(A) = 2$, ya que $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{array}\right| = -5 \neq 0$, y observamos que en la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

la primera y la tercera fila son iguales, luego Rango$(\overline{A}) = 2$.

En este caso Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2$ <n^o de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible indeterminado.

2. Hay que resolver el sistema para $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 9 \\ 3x- & 2y+ & z = & 20 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{38}{5} - \lambda \\ \\ y = \dfrac{7}{5} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

3. Hay que resolver el sistema para $a = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 3z = & 9 \\ 3x- & 2y+ & z = & 40 \\ x+ & y+ & 4z = & 9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{58}{5} \\ \\ y = -\dfrac{13}{5} \\ \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$

y el eje OX.

Solución:

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = -4,\ x = -2,\ x = 1$$

$$S = \left| \int_{-4}^{-2} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{-2}^{1} f(x)\, dx \right|$$

$$\int f(x)\, dx = \int (x^3 + 5x^2 + 2x - 8) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + x^2 - 8x + C$$

$$\left| \int_{-4}^{-2} f(x)\, dx \right| = \left| \frac{16}{3} \right| = \frac{16}{3}$$

$$\left| \int_{-2}^{1} f(x)\, dx \right| = \left| -\frac{63}{4} \right| = \frac{63}{4}$$

$$\acute{A}rea = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B:

$$P(A) = 0,6 \quad P(B) = 0,2 \quad P(A \cap B) = 0,12$$

1. calcular las probabilidades de los sucesos

   $$(A \cup B) \ \text{y} \ (A|(A \cup B))$$

   .

2. ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

Solución:

1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,6+0,2-0,12=0,68$

$$P(A|(A\cup B))=\frac{(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0,6}{0,68}=0,88$$

2. Como $P(A\cap B)=0,12=P(A)\cdot P(B)$ los sucesos son independientes. Como $P(A\cap B)\neq 0$ los sucesos no son incompatibles.

Problema 4 *(2 puntos)* El tiempo de conexión a Internet de los clientes de un cibercafé tiene una distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 horas. Una muestra de 40 clientes ha dado como resultado una media de tiempo de conexión de 2,85 horas. Se pide:

1. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para μ.
2. Calcular el tamaño mínimo que debería tener la muestra para estimar la media de tiempo diario de conexión a Internet de los clientes de ese cibercafé, con un error menor o igual que 0,25 horas y una probabilidad de 0,95.

Solución:

1. Tenemos $N(\mu,1{,}2)$, $n=40$, $\overline{x}=2{,}85$ y $z_{\alpha/2}=1{,}96\Longrightarrow$

$$IC=\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(2{,}478116147,3{,}221883852)$$

2.

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow 0{,}25=1{,}96\frac{1{,}2}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n=88{,}510464\Longrightarrow n=89$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coordinador2005) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Un taller dedicado a la confección de prendas de punto fabrica dos tipos de prendas: A y B. Para la confección de la prenda de tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de máquina. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquina. El taller dispone al mes como máximo de 85 horas para el trabajo manual y de 75 horas para el trabajo de máquina y debe de confeccionar al menos 100 prendas. Si los beneficios son de 20 euros por cada prenda de tipo A y de 17 euros por cada prenda de tipo B, ¿cuántas prendas de cada tipo debe de fabricar al mes, para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

Solución:

Sea x el nº de prendas del tipo A.

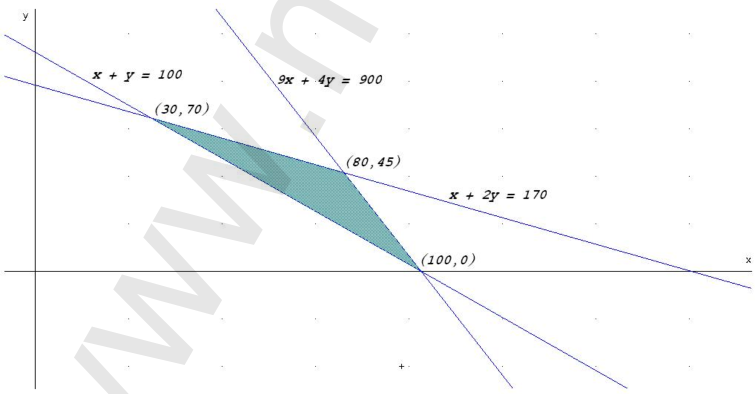
Sea y el nº de prendas del tipo B.

La función objetivo: $z(x, y) = 20x + 17y$

	Manual	Máquina
A	30	45
B	60	20
Total	5100	4500

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 30x + 60y \leq 5100 \\ 45x + 20y \leq 4500 \\ x + y \geq 100 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + 2y \leq 170 \\ 9x + 4y \leq 900 \\ x + y \geq 100 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$



$$\begin{array}{rcl} z(30, 70) & = & 1790 \\ z(80, 45) & = & 2365 \\ z(100, 0) & = & 2000 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberan fabricar 80 prendas tipo A y 45 prendas tipo B, con un beneficio de 2365 euros.

Problema 2 *(3 puntos)* Calcular el valor de $a > 0$ para que el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las curvas $y = x^3$, $y = ax$, sea igual a 4.

Solución:

$$x^3 = ax \Longrightarrow x = 0, \;\; x = -\sqrt{a}, \;\; x = \sqrt{a}$$

$$S = \left| \int_{-\sqrt{a}}^{0} (f(x) - g(x))\, dx \right| + \left| \int_{0}^{\sqrt{a}} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$\int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^3 - ax) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{ax^2}{2} + C$$

$$\left| \int_{-\sqrt{a}}^{0} (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \frac{a^2}{4} \right| = \frac{a^2}{4}$$

$$\left| \int_{0}^{\sqrt{a}} (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| -\frac{a^2}{4} \right| = \frac{a^2}{4}$$

$$\acute{A}rea = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = 4 \Longrightarrow a^2 = 8 \Longrightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

Como $a > 0$ la solución válida es $a = 2\sqrt{2}$.

Problema 3 *(2 puntos)* Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

Solución:

El espacio muestral será $\Omega = \{(B, B), (B, N), (N, B), (N, N)\}$ y la probabilidad de cada uno de estos sucesos es $1/4$.

Si una de las bolas ha salido blanca, sólo hay tres casos posibles de los que hay únicamente uno favorable, luego la probabilidad pedida es $1/3$.

Problema 4 *(2 puntos)* Un fabricante de automóviles afirma que los coches de un cierto modelo tienen un consumo por cada 100 kilómetros que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 0,68 litros. Se observa una muestra aleatoria simple de 20 coches del citado modelo y se obtiene una media de consumo de 6,8 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media de consumo de ese modelo de vehículos.

Solución:

Se trata de una distribución $N(\mu, 0{,}68)$, $n = 20$, $\overline{x} = 6{,}8$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (6{,}501976859, 7{,}098023140)$$