Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2005

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 2$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m-1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = 2m - 3 = 0 \Longrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Si $m = \frac{3}{2} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq \frac{3}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $XC - I = AB$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$XC - I = AB \Longrightarrow XC = AB + I \Longrightarrow X = (AB + I)C^{-1}$$

$$AB + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = (AB + I)C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{c} \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_4 \\ \mathrm{C}_2 - 2\mathrm{C}_4 \\ \mathrm{C}_3 \\ \mathrm{C}_4 \end{array} \right] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{c} \mathrm{C}_1 - 5\mathrm{C} - 3 \\ \mathrm{C}_2 - 3\mathrm{C}_3 \\ \mathrm{C}_3 \end{array} \right] = - \begin{vmatrix} -10 & -14 & 3 \\ -13 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -10 & -14 \\ -13 & -9 \end{vmatrix} = -92$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $A \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(A) < 3$, buscamos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Concluimos con que el Rango$(A) = 2$.