Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2006

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.
8. Área encerrada entre la función, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow (x-1)^3 = 0 \Longrightarrow x = 1$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
- $Dom(f) = R - \{0\}$

2. $f(-x) \neq f(x) \Longrightarrow$ No es PAR.

   $f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ No es IMPAR.

3. Asíntotas:

   - **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(x-1)^3}{x^2}=\infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(x-1)^3}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}-x\right)=-3$$

$$y = x - 3$$

4.

$$f'(x)=\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^3}=0\Longrightarrow x=-2,\;\; x=1$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

Crece: $(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$

Decrece: $[-2,0)$

5. La función tiene un máximo en el punto $(-2,-6.75)$, en el punto donde $x = 1$ la función pasa de crecer a crecer, luego no es ni máximo ni mínimo, y en el punto $x = 0$ hay una asíntotata, luego tampoco puede ser ni máximo ni mínimo.

6.

$$f''(x)=\frac{6(x-1)}{x^4}$$

Como el denominador es siempre positivo, bastará con estudiar el numerador

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
y''	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty,0)\cup(0,1]$

Cóncava: $[1,+\infty)$

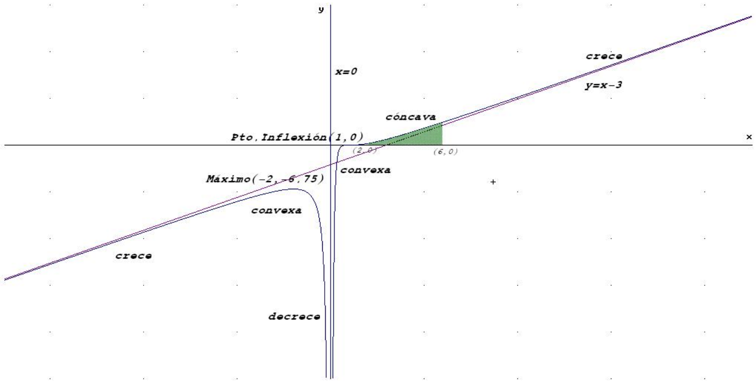
En el punto $(1,0)$ la gráfica pasa de ser convexa a ser cóncava y hay

continuidad en ese punto, por lo que estamos ante un punto de inflexión.
Por el criterio de la tercera derivada sería

$$f'''(x) = 6(4-3x)x^5 \Longrightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$$

Luego en $x = 1$ hay un punto de inflexión.

7. Representación



8.

$$F(x) = \int \frac{(x-1)^3}{x^2}\, dx = \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2}\, dx =$$

$$= \int \left(x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C$$

$$\acute{A}rea = |F(6) - F(2)| = \frac{11}{3} + 3\ln 3 = 6.962503532\ u^2$$