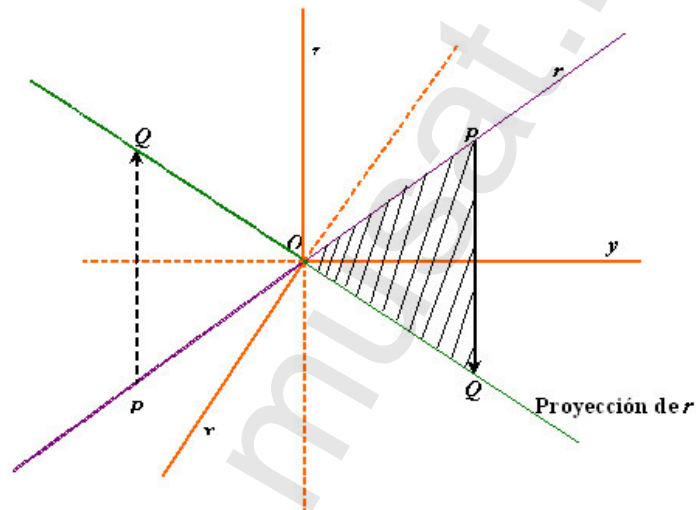


Examen de Matemáticas II (Junio 2006)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\vec{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

Solución:



$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (4, 3, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto de esta recta será: $P(4\lambda, 3\lambda, \lambda)$, y su proyección sobre el plano $z = 0$ será el punto $P(4\lambda, 3\lambda, 0)$.

Los vectores \vec{OP} y \vec{OQ} forman el triángulo OPQ , para calcular el área calculamos el producto vectorial de estos dos vectores

$$\vec{OP} \times \vec{OQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4\lambda & 3\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda & 0 \end{vmatrix} = (-3\lambda^2, 4\lambda^2, 0)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{OP} \times \vec{OQ}| = \frac{1}{2} \sqrt{9\lambda^4 + 16\lambda^4} = \frac{5\lambda^2}{2} = 1 \implies \lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\text{Si } \lambda = \sqrt{\frac{2}{5}} \implies P \left(4\sqrt{\frac{2}{5}}, 3\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}} \right)$$

$$\text{Si } \lambda = -\sqrt{\frac{2}{5}} \implies P \left(-4\sqrt{\frac{2}{5}}, -3\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}} \right)$$

Problema 2 (2 puntos) Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \quad s : \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$$

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-3, 4, 1) \\ P_r(-4, 7, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, -4, -1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (5, -5, 0)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Luego las rectas son paralelas.

Problema 3 (3 puntos) Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a .
- (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

1.

$$|M| = -2a(a^2 - 1) = 0 \implies a = 0, \quad a = 1, \quad a = -1$$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ entonces $|M| \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 3$.

Si $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$$

2. M es inversible para cualquier valor de a distinto de 0, 1 y -1 .

Si $a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (3 puntos) Se pide:

1. (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

2. (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

Solución:

1. a) ■ $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$, Punto de corte en $(0, 1/2)$.

■ Asíntotas:

1) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

2) Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

3) Oblicuas: No hay al haber horizontales.

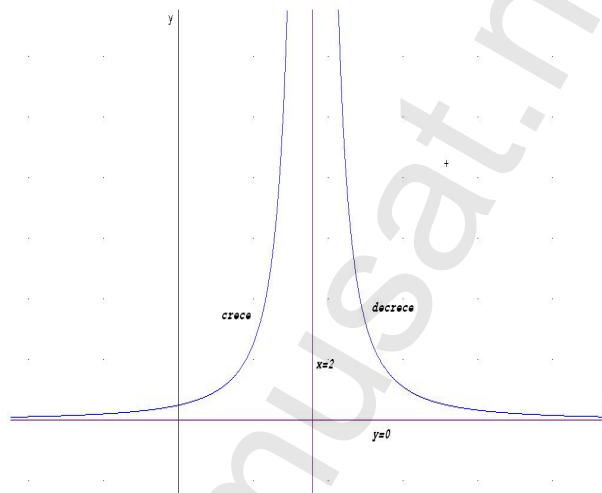
- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$$

Luego no hay ni máximos ni mínimos.

| | | |
|---------|----------------|---------------|
| | $(-\infty, 2)$ | $(2, \infty)$ |
| $f'(x)$ | - | + |
| $f(x)$ | decrece | crece |

- Representación gráfica:



2.

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \implies x = 1, x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

$$S = \int_{5/2}^3 \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) dx = \left[-\frac{1}{x-2} - x \right]_{5/2}^3 = \frac{1}{2}$$

