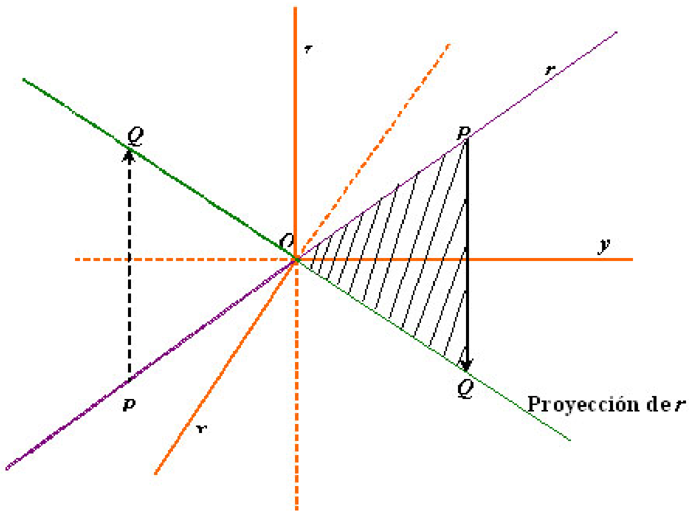
Examen de Matemáticas II (Junio 2006) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

Solución:



$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (4, 3, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Un punto de esta recta será: $P(4\lambda, 3\lambda, \lambda)$, y su proyección sobre el plano $z = 0$ será el punto $P(4\lambda, 3\lambda, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ forman el triángulo OPQ, para calcular el área calculamos el producto vectorial de estos dos vectores

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 4\lambda & 3\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda & 0 \end{array} \right| = (-3\lambda^2, 4\lambda^2, 0)$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^4 + 16\lambda^4} = \frac{5\lambda^2}{2} = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Si $\lambda = \sqrt{\frac{2}{5}} \Longrightarrow P\left(4\sqrt{\frac{2}{5}}, 3\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Si $\lambda = -\sqrt{\frac{2}{5}} \Longrightarrow P\left(-4\sqrt{\frac{2}{5}}, -3\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Problema 2 *(2 puntos)* Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 4, 1) \\ P_r(-4, 7, 0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, -4, -1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{P_rP_s} = (5, -5, 0)$$

$$|A| = \left| \begin{array}{rrr} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango} \left(\begin{array}{rrr} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{array} \right) = 2$$

Luego las rectas son paralelas.

Problema 3 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{array} \right)$$

1. (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

2. (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

1.

$$|M| = -2a(a^2 - 1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = 1, \;\; a = -1$$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ entonces $|M| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3$.

Si $a = 0$

$$M = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

2. M es inversible para cualquier valor de a distinto de 0, 1 y -1.

   Si $a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(3 puntos)* Se pide:

1. (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

2. (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

Solución:

1. *a)*
   - $Domf = R - \{2\}$, Punto de corte en $(0, 1/2)$.
   - Asíntotas:
     1) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

     2) Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

     3) Oblicuas: No hay al haber horizontales.

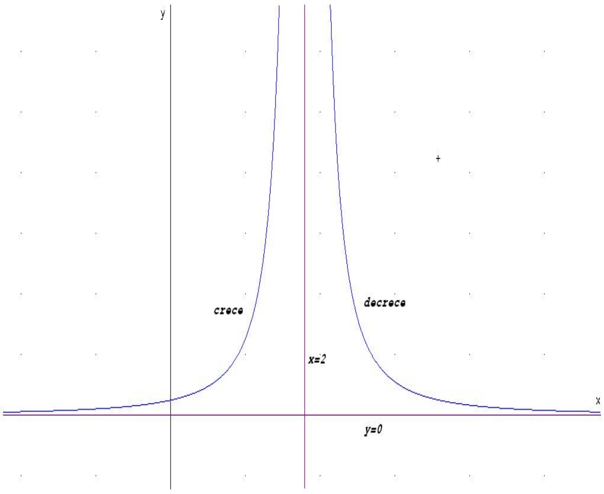
- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$$

Luego no hay ni máximos ni mínimos.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece	crece

- Representación gráfica:

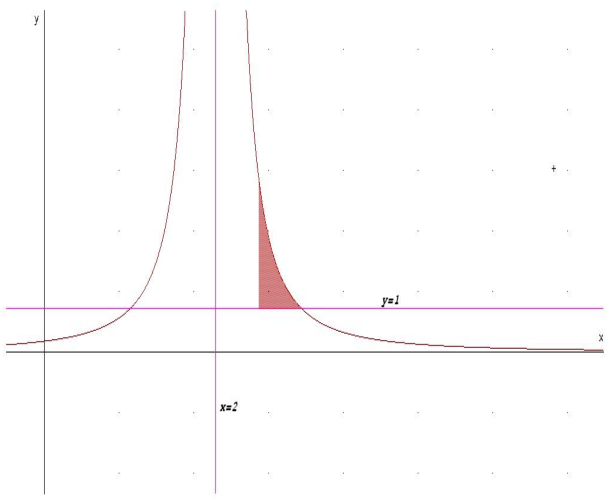


2.

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

$$S = \int_{5/2}^{3} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) \, dx = -\frac{1}{x-2} - x \Big]_{5/2}^{3} = \frac{1}{2}$$


y
x
y=1
x=2