Examen de Matemáticas II (Junio 2006)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* dado el sistema homogeneo

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & ky & -z=0 \\ kx- & y & +z=0 \\ (k+1)x+ & y & =0 \end{array}\right.$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x=y=z=0$. Resolverlo en tales casos.

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ (k+1) & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A|=k^2-k-2=0 \Longrightarrow k=-1,\ \ k=2$$

Si $k\neq -1$ y $k\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0$ el sistema es compatible determinado $x=y=z=0$.

Si $k=2 \Longrightarrow$ SCI

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y-z=0 \\ 3x+y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-\frac{1}{5}\lambda \\ y=\frac{3}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Si $k=-1 \Longrightarrow$ SCI

$$\left\{\begin{array}{c} x-y-z=0 \\ y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP=PA$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc} a+2c & b+2d \\ c & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2c=a \Longrightarrow c=0 \\ b+2d=2a+b \Longrightarrow a=d \\ c=c \\ d=2c+d \Longrightarrow c=0 \end{array}\right.$$

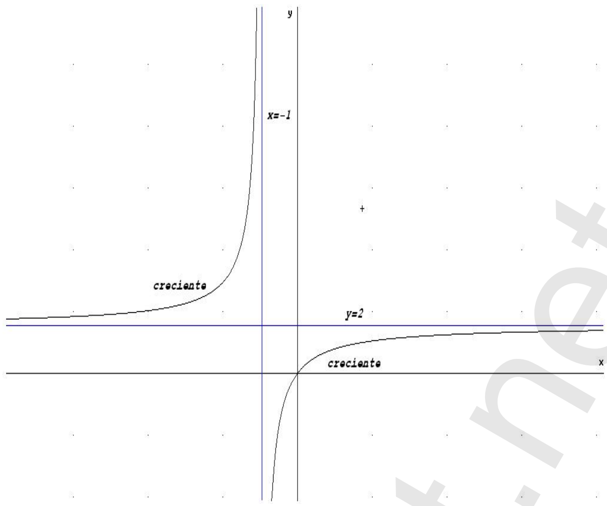
$$P = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array}\right)$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se pide:

1. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.
2. (1 punto) Demostrar que la función $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.
3. (1 punto) Calcular $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

Solución:

1.
   - $Dom f = R - \{-1\}$.
   - Asíntotas:
     (a) Verticales: $x = -1$
     $$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$
     $$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$
     (b) Horizontales: $y = 2$
     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$
     (c) Oblicuas: No hay al haber horizontales.
   - Monotonía:
     $$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Longrightarrow \text{siempre creciente}$$
     Luego no hay ni máximos ni mínimos.
   - Representación gráfica:



2. Si tenemos en cuenta que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales excluido el cero, y si tenemos en cuenta que la función $a_n = f(n) = \dfrac{2n}{n+1}$ hemos demostrado en el apartado anterior que es creciente en $R - \{-1\}$, con mayor razón lo es en el conjunto $N - \{0\}$.

   Otra manera de demostrarlo:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$$
   luego la sucesión es creciente.

3. $$\lim_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n+2} = 2$$

Problema 4 *(3 puntos)* Sean las rectas:
$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

1. (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
2. (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

Solución:
$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 2, -4) \\ P_r(-1, 2, 0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, 1) \\ P_s(2, -1, -2) \end{array} \right.$$

1. $\overrightarrow{OP_r} = (-1,2,0)$, $\overrightarrow{OP_s} = (2,-1,-2)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases} \qquad t : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & -2 & x+1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ 0 & -4 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & 3 & x-2 \\ -1 & 1 & y+1 \\ -2 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

2.

$$\overrightarrow{u_h} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(3,-5,-4)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_h} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_h} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases} \qquad t : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & -2 & x+1 \\ -5 & 2 & y-2 \\ -4 & -4 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 3 & 3 & x-2 \\ -5 & 1 & y+1 \\ -4 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$h : \begin{cases} 7x + 5y - z - 3 = 0 \\ x + 15y - 18z - 23 = 0 \end{cases}$$