# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

**Octubre 2005**

**Problema 1** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular

1. Los valores de $a$ para los que la matriz $A$ es inversible.
2. Calcular la inversa de $A$ para $a = 2$ y para $a = -1$, si es posible.

**Solución:**

1.
$$|A| = a(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = -1$$

Si $a = 0$ o $a = -1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe $A^{-1}$.

Si $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ si existe $A^{-1}$.

2. Si $a = 2$
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Si $a = -1$ no puede tener inversa.

**Problema 2** Resolver la ecuación matricial $AX - B = I - CX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$AX + CX = B + I \Longrightarrow X = (A+C)^{-1}(B+I)$$

$$B + I = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A+C)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A+C)^{-1}(B+I) = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

**Problema 3** Calcular los valores de $x$ para los que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 - \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_4 \end{bmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & -x & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ -x & 0 & -1 \\ -1 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1-x & x & 0 \\ -1 & x & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1-x & x \\ -1 & x \end{vmatrix} = x(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 2$$

**Problema 4** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & a \\ a & -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de $A$ para los diferentes valores de $a$.

**Solución:**

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 \\ a & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a(2a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 & a \\ a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = 2$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2a & 0 & a \\ a & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

Si $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la primera y la última fila son iguales, y el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por el contrario si $a \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.