Examen de Matemáticas 2^{o}Bachillerato(CN)

Octubre 2005

Problema 1 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular

1. Los valores de a para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular la inversa de A para $a = 2$.

Solución:

1.

$$|A| = -2a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$$

Si $a = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ si existe A^{-1}.

2. Si $a = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $XA - CB = A + I$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$XA = CB + A + I \Longrightarrow X = (CB + A + I)A^{-1}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CB + A + I = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (CB + A + I)A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular los valores de x para los que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & x-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & x-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} == \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2-\mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 \\ \mathrm{C}_4 \end{bmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ x & -x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ -x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2+\mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & 1 \\ -x & -x & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = -2x-1=0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Problema 4 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ a+1 & 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de a.

Solución:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a+1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{vmatrix} = a(1-a^2) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1, \ \ a = -1$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a+1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ a = -1$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a+1 & -1 & a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ -1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = a(a^2-a-)1 = 0 \Longrightarrow$$

$$a = 0, \;\; a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \;\; a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

las dos primeras filas son iguales, y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por el contrario si $a \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.