Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Octubre 2005

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n, para cualquier $n \in N$. Aplicar la fórmula obtenida para calcular A^{1001} y A^{2315}.

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{1001} = \begin{pmatrix} 1 & 1001 & 1001 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{2315} = \begin{pmatrix} 1 & 2315 & 2315 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - BX = C$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - BX = C \Longrightarrow (A - B)X = C \Longrightarrow X = (A - B)^{-1}C$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X=(A-B)^{-1}C=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular los valores de x para los que

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & x-1 \\ 1 & x & x-1 & x-1 \\ 1 & x-1 & x & x \\ 1 & x & x & x \end{vmatrix}=0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & x-1 \\ 1 & x & x-1 & x-1 \\ 1 & x-1 & x & x \\ 1 & x & x & x \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & x & x-1 & x-1 \\ 1 & x-1 & x & x \\ x & 1 & x & x-1 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2-\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3-\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_4 \end{bmatrix}=$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ x & 1 & x & x-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 0 & -1 & 1 \\ x & x & x-1 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2-\mathrm{C}_3 \\ \mathrm{C}_3 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -1 \\ x & 1 & x-1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & 1 \end{vmatrix}=-1$$

Nunca se puede cumplir que el valor de este determinante sea cero, sea cual sea el valor de x.

Problema 4 Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & -1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 2a \\ a & a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de a.

Solución:

$$A_1=\begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & a & -1 \end{vmatrix}=a(1-a)=0\Longrightarrow a=0,\ \ a=1$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 1 & 2a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = a(2a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ a = \frac{\sqrt{2}}{2},\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & 2a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ a = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ya no podemos encontrar un valor de a que anule los cuatro menores posibles de orden tres, luego el Rango$(A) = 3$ sea cual sea el valor de a.