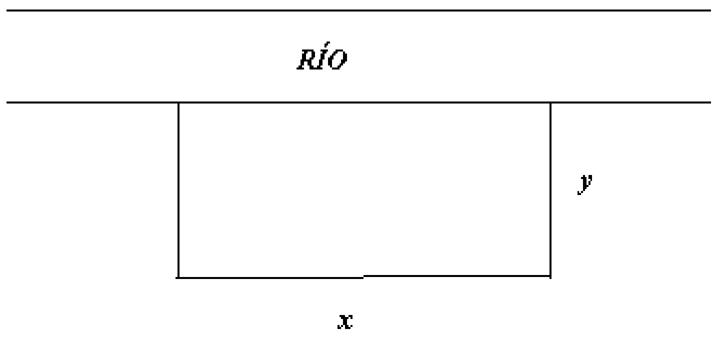
Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2005

Problema 1 Quieres vallar una parcela rectangular en el que uno de los lados da a un río. Calcular las dimensiones que debes dar a esa parcela para que encerrando un área de $1000m^2$ gastes la mínima cantidad de alambre.

Solución: Representación Gráfica:



$$S = x \cdot y = 1000 \Longrightarrow y = \frac{1000}{x}$$

$$L = x + 2y = x + \frac{2000}{x} \Longrightarrow L' = 1 - \frac{2000}{x^2} = 0 \Longrightarrow$$

$$x = \sqrt{2000} = 44,72135954\, m$$

$$L'' = \frac{4000}{x^3} \Longrightarrow S''(44,72135954) = 0,04472135957 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

$$y = \frac{1000}{\sqrt{2000}} = 22,36067977\, m$$

Problema 2 dada la función

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

Calcular:

1. Dominio.

2. Puntos de Corte.

3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonía.
6. Máximos y Mínimos.
7. Concavidad.
8. Representación Gráfica.
9. El área encerrada entre la gráfica, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

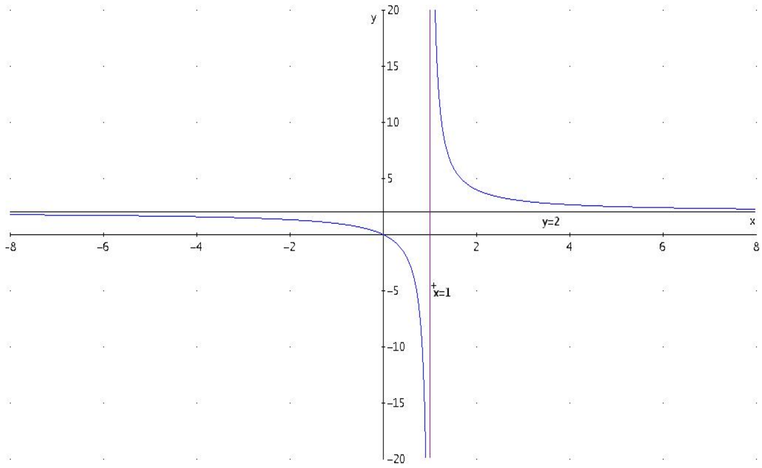
1. Dominio: $Dom f = R - \{1\}$
2. Puntos de Corte: $(0, 0)$
3. Simetrías:
$$f(-x) = \frac{-2x}{-x-1} \Longrightarrow \text{No hay}$$
4. Asíntotas:
   (a) Verticales: $x = 1$
   $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$
   (b) Horizontales:
   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = 2 \Longrightarrow y = 2$$
   Luego no hay asíntotas oblicuas.
5. Monotonía:
$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$
Luego la función es siempre decreciente.
6. Máximos y Mínimos: La función no tiene ni máximos ni mínimos, ya que la primera derivada no se anula nunca.

7. Concavidad:
$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$
El signo depende del denominador $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$:

$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$-$	$+$
decreciente	creciente

Como la segunda derivada no se anula nunca no hay puntos de inflexión.

8. Representación Gráfica:



9. El área encerrada entre la gráfica, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$:
$$\int_2^3 \frac{2x}{x-1} = \int_2^3 2\,dx + \int_2^3 \frac{2}{x-1} = 2x + 2\ln(x-1)]_2^3 = 2+2\ln 2 = 3,386294361$$

Problema 3 Se considera la función
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x + mx & \text{si} & x < 1 \\ nx^2 - 1 & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

1. determina m y n para que se cumplan la hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[-1, 3]$.

2. Halla los puntos del intervalo que garantiza dicho teorema.

Solución:

1. Para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio la función debe de ser continua en el intervalo $[-1, 3]$ y derivable en el intervalo $(-1, 3)$.

   (a) Continuidad:

   $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} 2x + m = 2 + m$$

   $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} nx^2 - 1 = n - 1$$

   Para que la función sea continua será:

   $$2 + m = n - 1 \Longrightarrow m - n = -3$$

   .

   (b) Derivabilidad:

   $$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2nx & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   Para que la función sea derivable será:

   $$f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow 2n = 2 \Longrightarrow n = 1$$

   Luego los valores buscados son $m = -2$ y $n = 1$.

2. El teorema concluye con que $\exists c \in [-1, 3]$ de manera que

   $$f'(c) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{8 - 4}{4} = 1$$

   $f'(c) = 2 \neq 1$ si $c < 1$ luego en esta rama no hay solución.

   $f'(c) = 2c^{=}1$ si $c \geq -1 \Longrightarrow c = 1/2$ solución que vale por ser un punto interior del intervalo.