Examen de Matemáticas II (Septiembre 2005) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned}
&\pi_1 : x + z = \lambda \\
&\pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\
&\pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda
\end{aligned}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 3 \\ x+ & y & -z & = 0 \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & & z & = 4 \\ 2x- & y & & = 7 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

Problema 3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

b) (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X) = A^2 - X^2$.

Problema 4 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$

b) (1 puntos) Hallar los puntos de corte de las recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.

c) (1 punto) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2005) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{4}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se considera la familia de planos:

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

a) (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

b) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.

c) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & & 2z+ & 1 = 0 \\ - & y+ & z+ & 1 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar A^{10}.

b) (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.

c) (1 punto) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10}.