Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coordinador2005) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se dice que una matriz cuadrada es ortogonal si $AA^T = I$

1. Estudiar si la matriz A es ortogonal

$$A = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Siendo A la matriz del apartado anterior, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nota: La notación A^T significa matriz traspuesta de A.

Solución:

1.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego es ortogonal $A^{-1} = A^T$

2.

$$A^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Sea la función: $f(x) = x^3 - 3x$

1. Calcular sus extremos y sus puntos de inflexión.

2. Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$.

Solución:

1.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 1$$

$$f''(x) = 6x \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(-1) = -6 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo en } x = -1 \\ f''(1) = 6 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo en } x = 1 \end{array} \right.$$

$$f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Como $f'''(x) = 6 \Longrightarrow f''(0) = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ hay un punto de inflexión en $x = 0$

2.

$$x^3 - 3x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = -\sqrt{3}, \;\; x = \sqrt{3}$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x)\, dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^{0} = \frac{5}{4}$$

$$I_2 = \int_{0}^{1/2} (x^3 - 3x)\, dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right]_{0}^{1/2} = -\frac{23}{64}$$

$$S = |I_1| + |I_2| = \frac{5}{4} + \frac{23}{64} = \frac{103}{64} \; u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0,6, la empata con probabilidad 0,3 y la pierde con probabilidad 0,1. El jugador juega dos partidas.

1. Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio.

2. Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.

Solución:

1. $\Omega = \{GG, GP, GE, PG, PP, PE, EG, EP, EE\}$

$$P(GG) = 0,36 \quad P(GP) = 0,18 \quad P(GE) = 0,06$$

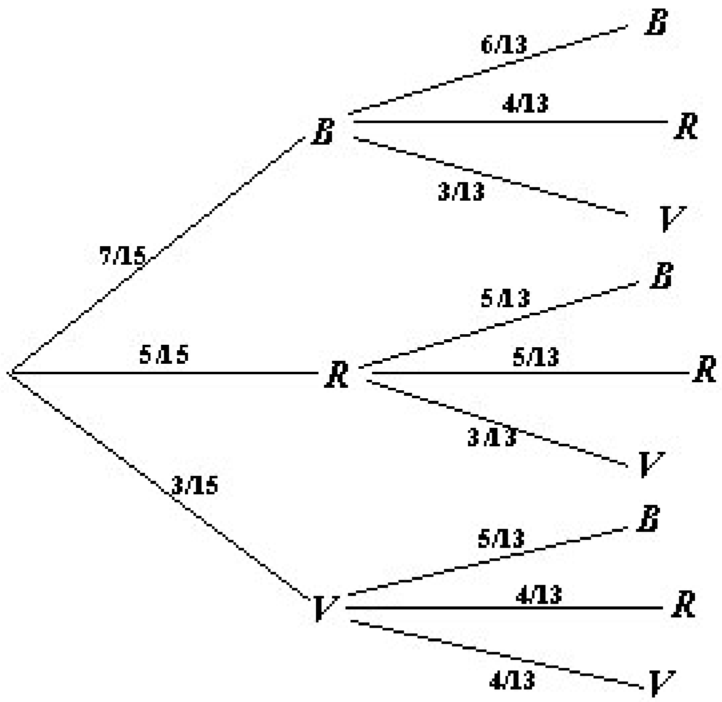
$$P(PG) = 0,18 \quad P(PP) = 0,09 \quad P(PE) = 0,03$$

$$P(EG) = 0,06 \quad P(EP) = 0,03 \quad P(EE) = 0,01$$

2.

$$P(\text{ganar al menos una}) = P(GG) + P(GP) + P(GE) + P(PG) + P(EG) =$$

$$0,36 + 0,18 + 0,06 + 0,18 + 0,06 = 0,84$$



Problema 4 *(2 puntos)* El número de días de ausencia en el trabajo de los empleados de cierta empresa para un período de seis meses, se puede aproximar mediante una distribución normal de desviación típica 1,5 días. Una muestra aleatoria de diez empleados ha proporcionado los siguientes datos

$$5 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 7 \quad 4 \quad 2 \quad 7 \quad 6 \quad 1$$

1. Determinar un intervalo de confianza al 90 % para el número medio de días que los empleados de esa empresa han faltado durante los seis últimos meses.

2. ¿Qué tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 días, con el mismo nivel de confianza?

Solución:

1. Tenemos $N(\mu, 1{,}5)$, $n = 10$, $\overline{x} = \dfrac{50}{10} = 5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4{,}219707987, 5{,}780292012)$$

2.

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0{,}5 = 1{,}645\frac{1{,}5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 24{,}354225 \Longrightarrow n = 25$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coordinador2005) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Una compañía naviera dispone de dos barcos A y B para realizar un determinado crucero. El barco A debe hacer tantos viajes o más que el barco B, pero no puede sobrepasar 12 viajes. Entre los dos barcos deben hacer no menos de 6 viajes y no más de 20. La naviera obtiene un beneficio de 18000 euros por cada viaje del barco A y 12000 euros por cada viaje del B. Se desea que las ganancias sean máximas.

1. Expresar la función objetivo.

2. Describir mediante inecuaciones las restricciones del problema y representar gráficamente el recinto definido.

3. Hallar el número de viajes que debe efectuar cada barco para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución:

Sea x el nº de viajes del barco A.

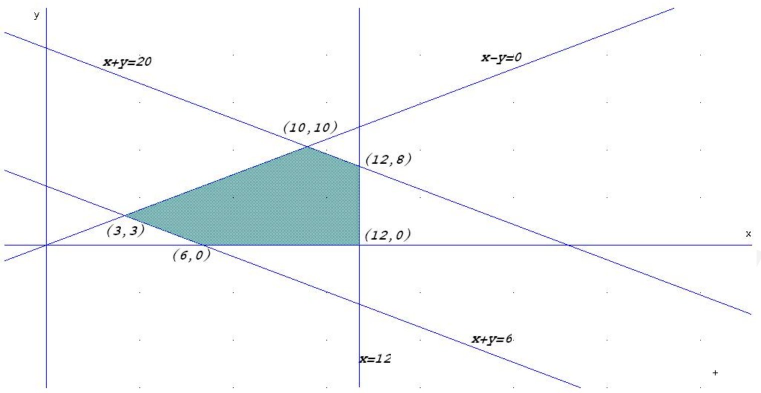
Sea y el nº de viajes del barco B.

1. La función objetivo: $z(x, y) = 18000x + 12000y$

2. las restricciones:
$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ x + y \leq 20 \\ x - y \geq 0 \\ x \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

3.
$$\begin{array}{lcr} z(10, 10) & = & 300000 \\ z(12, 8) & = & 312000 \\ z(6, 0) & = & 108000 \\ z(3, 3) & = & 90000 \\ z(12, 0) & = & 216000 \end{array}$$

   Luego para obtener el máximo beneficio se deberan hacer 12 cruceros A y 8 cruceros B, con un beneficio de 312000 euros.



Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$.
2. Esbozar su gráfica.
3. Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en $x = 1$.

Solución:

1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \ln x = 0 \\ \\ f(1) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ es continua en } x = 1$$

2.

$$f'(x) = 4x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}$$

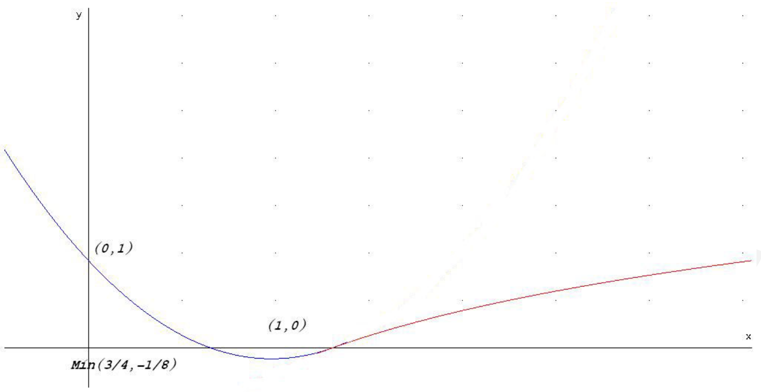
$$f''(x) = 4 \Longrightarrow f''(3/4) = 4 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

Luego hay un mínimo en el punto $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

Hay puntos de corte en:

Con el eje OX, hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(1/2, 0)$.

Con el eje OX, hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 1)$.



3. En $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 0$.

$$f'(x) = 4x - 3 \Longrightarrow m = f'(1) = -3$$

$$y = -3(x - 1) \Longrightarrow 3x + y - 3 = 0$$

Problema 3 *(2 puntos)* En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa

	Chicas	Chicos
Científico – Tecnológica	64	52
Humanidades y C. Sociales	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2º de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:

1. No curse la opción Científico-Tecnológica.

2. Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.

Solución:

	Chicas	Chicos	Totales
Científico – Tecnológica	64	52	116
Humanidades y C. Sociales	74	50	124
Totales	138	102	240

1. $P(\overline{CT}) = 1 - P(CT) = 1 - \dfrac{116}{240} = \dfrac{31}{60} = 0,5166666666$

2.

$$P(HCS|H) = \frac{P(H|HCS) \cdot P(HCS)}{P(H)} = \frac{50/124 \cdot 124/240}{102/240} =$$

$$\frac{25}{51} = 0,49$$

Problema 4 *(2 puntos)* La temperatura corporal en una cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media 36,7ºC y desviación típica 3,8ºC. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra:

1. Sea menor o igual a 36,9ºC.
2. Esté comprendida entre 36,5ºC y 37,3ºC.

Solución:

Se trata de una distribución $N\left(36{,}7, \dfrac{3{,}8}{\sqrt{100}}\right) = N(36{,}7, 0{,}38)$

1.

$$P(\overline{X} \le 36{,}9) = P\left(Z \le \frac{36{,}9 - 36{,}7}{0{,}38}\right) = P(Z \le 0{,}52) = 0{,}6985$$

2.

$$P(36{,}5 \le \overline{X} \le 37{,}3) = P\left(\frac{36{,}5 - 36{,}7}{0{,}38} Z \le \frac{37{,}3 - 36{,}7}{0{,}38}\right) =$$

$$P(-0{,}52 \le Z \le 1{,}58) = P(Z \le 1{,}58) - P(Z \le (-0{,}52) =$$

$$P(Z \le 1{,}58) + P(Z \le (0{,}52) - 1 = 0{,}695 + 0{,}9429 - 1 = 0{,}6379$$