

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2005)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos).

1. Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

2. Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Solución:

1. La función $f(x) = x^{15} + x + 1$ en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ toma los valores $f(-1) = -1$ y $f(1) = 3$, como además la función es continua por el teorema de Bolzano: $\exists c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$.
2. La derivada de la función $f'(x) = 15x^{14} + 1 > 0$ para cualquier valor de x , luego la función es siempre creciente, luego sólo puede cortar una vez al eje OX , y por el apartado anterior este punto de corte tiene que estar en el intervalo $[-1, 1]$.

Problema 2 (2 puntos).

1. (1 punto). Determinar el punto P , contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.
2. (1 punto). Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \frac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P .

Solución:

- 1.

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \implies x \pm 2$$

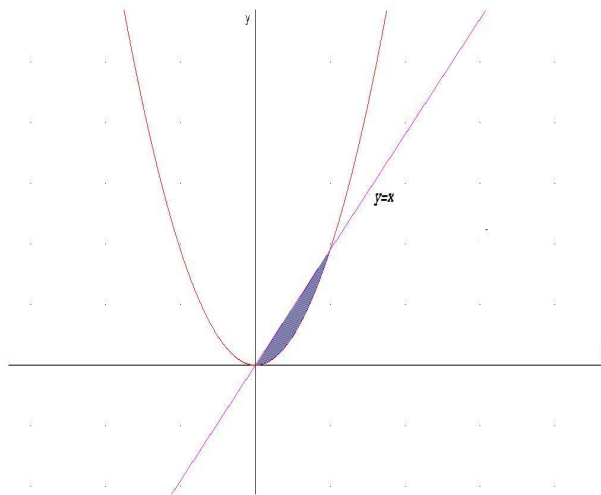
Como piden el punto del primer cuadrante la solución negativa no vale y el punto será $(2, 2)$.

2. La recta que une el origen de coordenadas y el punto $(2, 2)$ es $y = x$.
Los puntos de corte son

$$x = \frac{x^2}{2} \implies x^2 - 2x = 0 \implies x = 0, \quad x = 2$$

$$S = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Área} = \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} u^2$$



Problema 3 (3 puntos).

1. (2 punto). Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$

2. (1 punto). Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Solución:

- 1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & 2 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array} \right), \quad |A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10 = 0 \implies \lambda = 2, \quad \lambda = \frac{5}{2}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Por otro lado

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego en este caso $\text{Rango}(\bar{A}) \neq \text{Rango}(A) \implies$ sistema incompatible.

Si $\lambda = \frac{5}{2}$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 5/2 & 1 \\ 1 & 5/2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 23 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Por otro lado

$$\begin{vmatrix} 5 & 5/2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{55}{2} \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego en este caso $\text{Rango}(\bar{A}) \neq \text{Rango}(A) \implies$ sistema incompatible.

2. El sistema sólo es compatible cuando $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2}$ y $|A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10$. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = \frac{2a^3 - 1}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{6a^2 - 2a - 5}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 4 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{4a^3 - 14a + 11}{2a^2 - 9a + 10}$$

Problema 4 (3 puntos) Dados los puntos $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -3, -1)$ y $C(1, 0, 3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r : x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = z - 1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

Solución:

La ecuación paramétrica de la recta es

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$D(1 + \lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, -4, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (2, -1, 2), \quad \overrightarrow{AD} = (2 + \lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 + \lambda & -\lambda & \lambda \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = 4|\lambda - 5| = 2$$

$$|\lambda - 5| = \frac{1}{2}$$

$$\lambda - 5 = \frac{1}{2} \implies \lambda = \frac{11}{2} \implies D\left(\frac{13}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$$

$$\lambda - 5 = -\frac{1}{2} \implies \lambda = \frac{9}{2} \implies D\left(\frac{11}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2006)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos). Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\begin{cases} -ax + 4y + az = -a \\ 4x + ay - az = a \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

1. (1 punto). Discutir el sistema
2. (1 punto). Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -a & 4 & a & -a \\ 4 & a & -a & a \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |A| = a^2 - 16 = 0 \implies a = \pm 4$$

Si $a \neq \pm 4 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 4$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Como el menor

$$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -64 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ sistema incompatible.

Si $a = -4$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Como el menor

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \implies \text{Rango}(\vec{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\vec{A}) \implies$ sistema incompatible.

2. Cuando $a = 1$:

$$\begin{cases} -x+ & 4y+ & z = & -1 \\ 4x+ & y- & z = & 1 \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{cases} \quad \vec{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |A| = 1^2 - 16 = -15$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = -\frac{2}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{19}{5}$$

Problema 2 (2 puntos) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto). Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

2. (1 punto). Hallar A^n .

Solución:

1.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$2^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$2^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4A$$

$$A^3 - 2A^2 = 4A - 4A = 0$$

2. $A^n = 2^{n-1}A$

Problema 3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = \ln(1+x^2)$, donde \ln significa Logaritmo Neperiano.

- (1 punto). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.
- (1 punto). Dibujar la gráfica de f .
- (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente	creciente

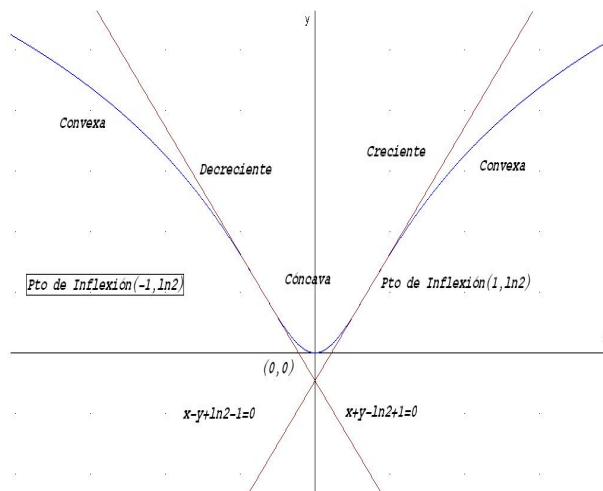
Luego en el punto $(0, 0)$ tenemos un Mínimo.

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \implies x = -1, \quad x = 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa

Luego en los puntos $(-1, \ln 2)$ y $(1, \ln 2)$ hay dos puntos de Inflexión.

2. Representación gráfica



3. La tangente en el punto $(-1, \ln 2)$ es:

$$m = f'(-1) = -1 \implies y - \ln 2 = -x + 1 \implies x + y - \ln 2 + 1 = 0$$

La tangente en el punto $(1, \ln 2)$ es:

$$m = f'(1) = 1 \implies y - \ln 2 = x - 1 \implies x - y + \ln 2 - 1 = 0$$

Problema 4 (3 puntos) Se considera la recta: $r : \frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m :

$$s : \begin{cases} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{cases}$$

- (2 puntos). Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.
- (1 punto). Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, 2) \\ P_r(0, 4, 5) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 3, 1) \\ P_s(5 - 5m, 7 - 3m, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (5 - 5m, 3 - 3m, -5)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 - 5m & 3 - 3m & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15(m - 2) = 0 \implies m = 2$$

Cuando $m = 2$ el $\text{Rango}(A) = 2$, y además el $\text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \implies$ las dos rectas se cortan.

2. Si $m = 0$ las dos rectas se cortan, ya que $|A| \neq 0$ y tenemos que

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 3, 1) \\ P_s(5, 7, 0) \end{cases}$$

$$d(r, s) = \frac{|\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{|-30|}{\sqrt{18}} = 5\sqrt{2}$$