Examen de Matemáticas II (Coordinador 2005)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos).*

1. Justificar razonadamente que la gráfica de la función
$$f(x) = x^{15} + x + 1$$
corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

2. Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Problema 2 *(2 puntos).*

1. (1 punto). Determinar el punto P, contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

2. (1 punto). Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P.

Problema 3 *(3 puntos).*

1. (2 punto). Discutir según los valores del parámetro λ el sistema
$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2\lambda x+ & 2y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ 4x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

2. (1 punto). Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Problema 4 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -3, -1)$ y $C(1, 0, 3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:
$$r : x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = z - 1$$
de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2006)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 5 *(2 puntos)*.considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az = & -a \\ 4x+ & ay- & az = & a \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1 punto). Discutir el sistema
2. (1 punto). Resolver el sistema para $a = 1$.

Problema 6 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto). Comprobar que
$$A^3 - 2A^2 = 0$$
2. (1 punto). Hallar A^n.

Problema 7 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \ln(1+x^2)$, donde ln significa *Logaritmo Neperiano.*

1. (1 punto). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.
2. (1 punto). Dibujar la gráfica de f.
3. (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Problema 8 *(3 puntos)*Se considera la recta: $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m:

$$s : \left\{\begin{array}{l} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{array}\right.$$

1. (2 puntos). Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.
2. (1 punto). Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.