Examen de Matemáticas II (Septiembre 2005)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

Solución:

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x(x-1)} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$f(2) = \ln \frac{4}{1} = \ln 4 = 2\ln 2 \Longrightarrow (4, 2\ln 2)$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{4}$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, 0) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ la función es creciente en este intervalo.

En el intervalo $(0, +\infty) \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow$ la función es decreciente en este intervalo.

Luego en el punto $(0, f(0)) = (0, 1/4)$ la función presenta un máximo.

b)

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{1+e^x} + C$$

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = -\frac{1}{1+e^x}\Big]_0^a = -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{4} \Longrightarrow 1+e^a = 4 \Longrightarrow e^a = 3 \Longrightarrow a = \ln 3$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se considera la familia de planos:

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

a) (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

b) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1,1,0)$.

c) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & & 2z+ & 1=0 \\ - & y+ & z+ & 1=0 \end{array} \right.$$

Solución:

a) basta dar dos valores a m que sean distintos:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} m=0 \Longrightarrow & - & 2y & +3z+1 = & 0 \\ m=-1 \Longrightarrow & -x- & 3y & = & 0 \end{array} \right.$$

La intersección de estos dos planos sería la recta pedida, que en forma parámetrica

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{array} \right| = (9,-3,-2), \quad P_r(-6,2,1) \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -6+9\lambda \\ y = 2-3\lambda \\ z = 1-2\lambda \end{array} \right.$$

b) Sustituyendo este punto en la familia tenemos

$$m + (m-2) + m + 1 = 0 \Longrightarrow m = \frac{1}{3}$$

El plano buscado será

$$\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}-2\right)y + 3\left(\frac{1}{3}+1\right)z + \left(\frac{1}{3}+1\right) = 0 \Longrightarrow x-5y+12z+4 = 0$$

c)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, -1) \\ \\ P_r(1, 2, 1) \end{cases}$$

Los vectores $(m, m-2, 3m+3)$ y $(-2, -1, -1)$ tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar tiene que ser cero

$$-2m - m + 2 - 3m - 3 = 0 \Longrightarrow m = -\frac{1}{6}$$

Sustituyendo

$$-\frac{1}{6}x + \left(-\frac{1}{6} - 2\right)y + 3\left(-\frac{1}{6} + 1\right)z + \left(-\frac{1}{6} + 1\right) = 0 \Longrightarrow x + 13y - 15z - 5 = 0$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar A^{10}.

b) (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.

c) (1 punto) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10}.

Solución:

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = A^3 \cdot A^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$