Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2005) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} 2x- & 3y+ & z = 0 \\ x- & ky- & 3z = 0 \\ 5x+ & 2y- & z = 0 \end{cases}$$

Se pide:

1. Discutir el sistema para los distintos valores de k.

2. Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.

Solución:

1. Se trata de un sistema homogéneo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A| = 7k + 56 = 0 \Longrightarrow k = -8$$

   Si $k \neq -8 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 \Longrightarrow$ sistema compatible determinado.

   Si $k = 8$:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$$

   Luego el Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ el sistema sería compatible indeterminado.

2. Cuando $k \neq 0$ el sistema era compatible determinado, y como se trata de un sistema homogéneo, la única solución sería $x = y = z = 0$, es decir, la solución trivial.

   Cuando $k = -8$ el sistema será compatible indeterminado con un grado de libertad, es decir, tendrá infinitas soluciones que dependerán de como varie un parámetro.

   Por el menor que escogimos en el apartado anterior para el estudio del rango, en este caso, podemos despreciar la tercera ecuación con lo que nos queda el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x- & 3y+ & z=0 \\ x+ & 8y- & 3z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 2x- & 3y= & -z \\ x+ & 8y= & 3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{17}{19}t \\ \\ y=\dfrac{5}{19}t \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* La función:

$$B(x)=\frac{-x^2+9x-16}{x}$$

representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

Solución:

Calculamos la primera derivada para obtener los puntos extremos

$$B'(x)=\frac{16-x^2}{x^2}=0\Longrightarrow x=\pm 4$$

Calculamos la segunda derivada para decidir que valor es máximo o mínimo

$$B''(x)=-\frac{32}{x^3}\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} B''(4)=-\dfrac{32}{4^3}<0\Longrightarrow \text{Máximo} \\ \\ B''(-4)=-\dfrac{32}{(-4)^3}>0\Longrightarrow \text{Mínimo} \end{array}\right.$$

En $x=4$ hay un máximo que nos determina un beneficio

$$B(4)=\frac{-4^2+9\cdot 4-16}{4}=1$$

El máximo serían 4 artículos con un beneficio de 1.000 euros.

Problema 3 *(2 puntos)* Una caja con una docena de huevos contiene dos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.

1. Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.

2. Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.

Solución:

1. LLamamos $A = \{\text{sale un huevo en buen estado}\}$
   LLamamos $B = \{\text{sale un huevo roto}\}$

$$P(AAAA) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{14}{99} = 0,1414141414$$

2.

$$P(BAAA) + P(ABAA) + P(AABA) + P(AAAB) =$$

$$4 \cdot P(BAAA) = 4 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{224}{495} = 0,4525252525$$

Problema 4 *(2 puntos)* En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

1. Hallar un intervalo de confianza al 80% para la media poblacional.

2. Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95%, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?.

Solución:

1.

$$1 - \alpha = 0,80 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,1 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,9 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,28$$

$$I.C. = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(5 - 1,28\frac{2}{\sqrt{10.000}}; 5 - 1,28\frac{2}{\sqrt{10.000}}\right) = (4,9744; 5,0256)$$

2.

$$1 - \alpha = 0,95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,25 = 1,96\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 2}{0,25} \Longrightarrow n = 245,8624$$

Luego $n = 246$.