Problemas de Selectividad

Isaac Musat Hervás

18 de junio de 2005

Capítulo 1

Problemas de Álgebra

Problema 1 Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (F_1 \longrightarrow F_1 + F_2 + F_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \longrightarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \longrightarrow C_3 - C_1 \end{pmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Problema 2 Calcula el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \longrightarrow F_4 - F_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^3 \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (C_1 \longrightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4) = (x-a)^3 \begin{vmatrix} x-3a & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)^3(x-3a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^3(x-3a)$$

Problema 3 Halla en función de a, el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (F_1 \longrightarrow F_1 + F_2) = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)(a^3-1)$$

Problema 4 Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \longrightarrow F_4 - F_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= (F_3 \longrightarrow F_3 - F_2) = a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} =$$

$$= a(b-a)(d-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Problema 5 Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c} C_1 \longrightarrow C_1 - xC_2 \\ C_4 \longrightarrow C_4 - C_2 \end{array} \right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-x^2 & -x & 1 & x \\ x & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-x^2 & 1 & x \\ x & -x & 0 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2\begin{vmatrix} 1-x^2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (C_1 \longrightarrow C_1 + C_2) =$$

$$= -x^2\begin{vmatrix} 2-x^2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x^2\begin{vmatrix} 2-x^2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = x^2(x^2-4) = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 0, \quad x = 2, \quad x = -2$$

Problema 6 Calcula el valor de este determinante, dando el resultado factorizado:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c} C_1 \longrightarrow C_1 - aC_2 \\ C_4 \longrightarrow C_4 - C_2 \end{array} \right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a & 1 & -a \\ -a & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-a^2 & 1 & -a \\ -a & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1-a^2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (F_1 \longrightarrow F_1 + F_3) =$$

$$= a\begin{vmatrix} 2-a^2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 2-a^2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2(a^2-4)$$

Problema 7 Halla, en función de a, el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & -a^2+1 & a^2-a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 \\ -a^2+1 & a^2-a \end{vmatrix} = (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -1 & a^2-a \end{vmatrix} = (a^2-1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)(a+1)(a-1) = (a^2-1)^2$$

Problema 8 Calcule mediante transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, este determinante:

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix} = [C_1 : C_1+C_2+C_3] = \begin{vmatrix} 2+a+b+c & b & c \\ 2+a+b+c & 2+b & c \\ 2+a+b+c & b & 2+c \end{vmatrix} =$$

$$= (2+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 2+b & c \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} = [F_2 : F_2-F_1] = (2+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & 2+c \end{vmatrix} = 4(2+a+b+c)$$

Problema 9 Estudia el rango de esta matriz, según los valores de t:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(M) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Longrightarrow Rango(M) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{vmatrix} = t^2 + 4t - 12 = 0 \Longrightarrow t = -6, \ t = 2$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2t + 2t = 0$$

3.
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & t & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$$

4.
$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ t & 4 & 0 \\ 3 & t & -2 \end{vmatrix} = 2(t^2 - 4t - 12) = 0 \Longrightarrow t = -6, \ \ t = 2$$

En conclusión:

Si $t = -6$ o $t = 2$, los cuatro determinantes son cero $\Longrightarrow Rango(M) = 2$.

Si $t \neq -6$ y $t \neq 2$, alguno de los cuatro determinantes es distinto de cero y, por tanto, $Rango(M) = 3$.

Problema 10 Determina cuál es el rango de la matriz A, según los valores de λ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(A) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de λ que los anulan son los siguientes:

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda^2-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = -2$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 2$$

3. $$\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2(2-\lambda^2-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -2,\ \lambda = 1$$

En conclusión, como no hay ningún valor de λ que anule los cuatro determinantes a la vez $\Longrightarrow Rango(A) = 3$

Problema 11 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sea n un número natural cualquiera. Determinar el valor de A^n para cada n y halla $A^{350} - A^{250}$.

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdots A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{350} - A^{250} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 12 Estudia el rango de la matriz M según los valores de t:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(M) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow Rango(M) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & t & 3 \\ 1 & 8-3t & 3 \end{vmatrix} = 0$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 8-3t & -2 \end{vmatrix} = 0$$

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

4. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ t & 3 & 2 \\ 8-3t & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

En conclusión, los cuatro determinantes son cero sea cual sea el valor de t, luego $Rango(M) = 2$.

Problema 13 Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(M) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow Rango(M) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 2a & 5 \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = -1$$

2.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 2a & a \end{vmatrix} = a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = -1, \ a = 2$$

3.

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 2(a^2 - 4a + 3) = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = 3$$

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 2a & 5 & a \end{vmatrix} = -3a^2 + 8a - 5 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = \frac{5}{3}$$

En conclusión:

Si $a = 1$ los cuatro determinantes son cero $\Longrightarrow Rango(M) = 2$.

Si $a \neq 1$ alguno de los cuatro determinantes es distinto de cero y, por tanto, $Rango(M) = 3$.

Problema 14 Determina el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & -3 & 0 \\ 4 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(A) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a + 3 = 0 \Longrightarrow a = -3,\ a = -1$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4.
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & -3 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

En conclusión:

Si $a = -3$ o $a = -1$ los cuatro determinantes son cero $\Longrightarrow Rango(M) = 2$.

Si $a \neq -3$ y $a \neq -1$ alguno de los cuatro determinantes es distinto de cero y, por tanto, $Rango(M) = 3$.

Problema 15 Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$$

Para los casos en los que $a = 2$ y $a = 0$.

Solución:

Para que A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|A| = -a = 0$. Es decir, la matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 0$.

- Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 0$ no tiene inversa.

Problema 16 Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla los valores de x para los cuales la matriz M no es inversible. Hallar la inversa de M para $x = 2$.

Solución:

Para que M tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|M| = 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1$. Es decir, la matriz M tiene inversa siempre que $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

Para $x = 2$ tendremos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \frac{Adj(M^T)}{|M|} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & -2/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 17 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & -k & -1 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de k para los que la matriz A tiene inversa.

2. Calcular A^{-1} para $k = 1$.

Solución

1. *Calculamos* $|A| = 2k^2 - k - 3 = 0 \Longrightarrow k = \frac{3}{2}$, $k = -1$. *Luego* A *tendrá inversa siempre que* $k \neq 0$.

2. *Sustituimos* $k = 1$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 18 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra los valores de a para los que la matriz no es inversible.

2. Calcula A^{-1} para $a = 2$

Solución:

1. Para que A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|A| = (a-1)(3a-2) = 0$. Es decir, la matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 1$ y $a \neq \frac{2}{3}$.

2. Para $a = 2$ tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Problema 19 Halla X tal que $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Tenemos que calcular A^{-1} y multiplicar este resultado por B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3/5 & 1/5 & 6/5 \\ 2/5 & 1/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3/5 & 1/5 & 6/5 \\ 2/5 & 1/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 20 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación matricial $AX - A = B - C$.

Solución:

$$AX - A = B - C \Longrightarrow A(X - I) = B - C \Longrightarrow X - I = A^{-1}(B - C) \Longrightarrow$$
$$X = A^{-1}(B - C) + I$$

Tenemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 21 Halla X tal que $AX + B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX + B = 0 \Longrightarrow AX = -B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \Longrightarrow X = A^{-1}(-B)$$

Tenemos que calcular A^{-1} y multiplicar este resultado por $-B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 22 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra los valores de λ para los que la matriz no es inversible.
2. Calcula A^{-1} para $\lambda = 2$ y $\lambda = 0$

Solución:

1. Para que A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|A| = 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 3(\lambda + 1)^2 = 0$. Es decir, la matriz A tiene inversa siempre que $\lambda \neq -1$.
2. Para $\lambda = 2$ tendremos:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & -1/9 \\ -1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

   Para $\lambda = 0$ tendremos:

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 23 Determinar para que valores de m tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

y hállala para $m = 2$.

Solución:

Una matriz A tienen inversa siempre que $|A| \neq 0$, luego

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3 = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -1$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1 y -1.

Si $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/9 & -2/9 & 4/9 \\ 4/3 & 2/3 & -1/3 \\ -8/9 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Problema 24 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} -x+ & 2y- & z = & 1 \\ 3x- & y+ & 2z = & -4 \\ x- & y+ & z = & -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 25 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} 2x+ & 3y+ & z = & 7 \\ x+ & y- & 2z = & 5 \\ & y+ & 2z = & 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 & -7/3 \\ -2/3 & 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 & -7/3 \\ -2/3 & 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 26 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} 4x+ & 2y- & z = & 6 \\ x+ & & z = & 1 \\ 2x+ & y+ & z = & 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & -2 & 5/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & -2 & 5/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 27 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} -3x+ & y- & z = & 5 \\ x+ & 2y+ & z = & 0 \\ 2x+ & & z = & 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -11 \\ 41 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = -19 \\ y = -11 \\ z = 41 \end{cases}$$

Problema 28 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} x- & y+ & z = & 6 \\ 2x- & y+ & z = & 8 \\ x- & 2y+ & z = & 7 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Problema 29 Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = X - B \Longrightarrow AX - X = -B \Longrightarrow (A - I)X = -B \Longrightarrow$$

$$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}(-B) \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}(-B)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 30 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Averiguar si existe algún valor de a de forma que $A^2 - 3A = -2I$ siendo I la matriz identidad.

2. Sea A cualquier matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A = -2I$. Probar que A tiene inversa utilizando la ecuación dada para expresar A^{-1} en función de A.

Solución:

1. $$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2I$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} 49-15a & 7a+a^2-12 & -12-3a \\ 21-6a & 3a+a^2-6 & -3-3a \\ 6+6a & 3a^2+2a-10 & 19-18a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 3a & -18 \\ 9 & 3a & -9 \\ 9a & 6 & -15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 28-15a & a^2+4a-12 & 6-3a \\ 12-6a & a^2-6 & 6-3a \\ 6-3a & 3a^2+2a-16 & 34-18a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si igualamos todos los términos tenemos que en todas las condiciones se cumple:

$$28 - 15a = -2 \Longrightarrow a = 2$$

2. $$A^2 - 3A = -2I \Longrightarrow (A - 3I)A = -2I \Longrightarrow -\frac{1}{2}(A - 3I)A = I \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I)$$

Es fácil comprobar que la multiplicación de A^{-1} por el otro lado cumple la proiedad de inversa:

$$A(-\frac{1}{2}(A - 3I)) = -\frac{1}{2}A(A - 3I) = -\frac{1}{2}(A^2 - 3A) = I$$

Problema 31 Resuelve la ecuación matricial $AX - B + C = 0$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$AX - B + C = 0 \Longrightarrow AX = B - C \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(B - C) \Longrightarrow$

$$X = A^{-1}(B - C)$$

$$B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 32 Sea A una matriz $m \times n$

1. ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila?. Si existe, ¿qué orden tiene?.

2. ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB sea una matriz fila?. Si existe, ¿qué orden tiene?.

3. Busca una matriz B tal que $BA = (0\ \ 0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

1. Para que B se pueda multiplicar por A tiene que tener por dimensión $p \times n$, y en el caso de que $p = 1$ la matriz resultante BA tendrá de dimensión $1 \times m$, que sería una matriz fila.

2. Para que B se pueda multiplicar por A tiene que tener por dimensión $m \times p$, y en el caso de que $p = 1$ la matriz resultante AB tendrá de dimensión $m \times 1$, que sería una matriz columna, está claro que no es posible para ningún valor que demos a p, un resultado de matriz fila.

3. Para que $BA = (0, 0)$ es necesario que B tenga de dimensión 1×3, $B = (a\ \ b\ \ c)$ y tenemos:

$$(a\ \ b\ \ c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (a\ \ a + b) = (0\ \ 0) \Longrightarrow a = 0, \ \ b = 0$$

c puede ser cualquier valor por lo que la matriz $B = (0\ \ 0\ \ c)$.

Problema 33 Halla X tal que $AX + B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX + B = 0 \Longrightarrow AX = -B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \Longrightarrow X = A^{-1}(-B)$$

Tenemos que calcular A^{-1} y multiplicar este resultado por $-B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 34 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x- & y+ & 3z = & 1 \\ -x+ & y- & z = & 2 \\ x+ & y+ & 3z = & 3 \end{array} \right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$. Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 35 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 3 \\ -x+ & 2y- & z = & 1 \\ 2x- & y+ & z = & 2 \\ -x+ & 5y- & 5z = & 5 \end{array} \right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 3$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

Problema 36 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 3x- & 4y & +z = & 1 \\ -x+ & 2y & -z = & 3 \\ x- & & z = & 7 \\ x- & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ <nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, de $3 - 2 = 1$ grados de libertad.

Problema 37 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y = & 3 \\ -x+ & 3y = & -1 \\ -x+ & 6z = & 2 \\ x- & y = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 38 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 3y+ & z = & 1 \\ x+ & y- & z = & 0 \\ 3x- & 2y & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+2t}{5} \\ \\ y = \dfrac{-1+3t}{5} \\ \\ z = t \end{cases}$$

Problema 39 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 4 \\ 2x- & 3y+ & z = & -1 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 3$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) =$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

La solución será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{17}{15} \\ \\ y = \dfrac{23}{15} \\ \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Problema 40 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x- & y+ & z= & 2\\ x- & 2y- & z= & -1\\ 2x+ & y+ & z= & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=3$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})=$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{9}\\ \\ y=-\dfrac{1}{3}\\ \\ z=\dfrac{14}{9} \end{array}\right.$$

Problema 41 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & y+ & 2z= & 1\\ x+ & y+ & z= & 2\\ 2x- & 2y+ & z= & -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 3 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3-3t}{4} \\ \\ y = \dfrac{5-t}{4} \\ \\ z = t \end{cases}$$

Problema 42 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x- & y- & z = & 0 \\ 2x+ & 2y+ & z = & -1 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 43 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+ & 4y- & z = & 1 \\ x- & y- & z = & -2 \\ 4x+ & 3y- & 2z = & -1 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-7+5t}{7} \\ \\ y = \dfrac{7-2t}{7} \\ \\ z = t \end{cases}$$

Problema 44 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y- & z= & 2 \\ x+ & 2y- & 3z= & 1 \\ 4x+ & 4y- & 4z= & 7 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)\neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 45 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 5x- & 2y+ & 3z= & 5 \\ x+ & y+ & z= & 2 \\ 4x- & 3y+ & 2z= & 3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{crc} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{crc|c} 5 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{9-5t}{7} \\ \\ y=\dfrac{5-2t}{7} \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 46 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 5x+ & y+ & z= & 4 \\ -x+ & y- & 3z= & -2 \\ 2x+ & y- & z= & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3-2t}{3} \\ \\ y=\dfrac{-3+7t}{3} \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 47 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x- & y+ & 3z= & 2 \\ x- & y- & 2z= & -1 \\ 6x- & 3y- & z= & 0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3-5t}{3} \\ \\ y=\dfrac{6-11t}{3} \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 48 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & z= & 2 \\ x+ & y+ & z= & 2 \\ 3x+ & 2y & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)\neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 49 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -2x+ & 5y- & 3z= & 2 \\ x+ & 3y+ & z= & 2 \\ x- & y+ & 3z= & -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=3$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})=$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ \\ y=\dfrac{1}{2} \\ \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Problema 50 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 7x- & 3y- & 2z= & -1 \\ 2x+ & y- & 3z= & 3 \\ 5x- & 4y+ & z= & -4 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ <nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8+11t}{13} \\ \\ y = \dfrac{23+17t}{13} \\ \\ z = t \end{cases}$$

Problema 51 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x- & 2y+ & 5z = & 3 \\ x+ & y- & z = & -1 \\ x- & 3y+ & 6z = & 5 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 52 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x- & y+ & 2z- & t = & 3 \\ 2x+ & y- & z+ & t = & 2 \\ -x+ & y+ & z- & t = & 1 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 3$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ <nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, de $4 - 3 = 1$ grados de libertad.

Problema 53 Discute si el sistema siguiente es compatible, y en caso afirmativo encuentra las soluciones.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & -1\\ x- & y+ & 2z= & 1\\ x+ & 5y- & z= & -5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 5 & -1 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 5 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$

Luego $Rango(A)=Rango(\overline{A})=2<$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Como $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{array}\right| = -2\neq 0$, luego las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes, y podemos despreciar la última.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +y+ & z & =-1\\ x & -y+ & 2z & =1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x & +y= & -1-z\\ x & -y= & 1-2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rc} x= & -\dfrac{3t}{2}\\ \\ y= & \dfrac{-2+t}{2}\\ \\ z= & t \end{array}\right.$$

Problema 54 Discute si el sistema siguiente es compatible, y en caso afirmativo encuentra las soluciones.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2y+ & z= & 2\\ x+ & y- & z= & 1\\ 7x- & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2y+ & z= & 2\\ x+ & y- & z= & 1\\ 7x- & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right. \xrightarrow{(E_2\longrightarrow E_1)} \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1\\ 3x- & 2y+ & z= & 2\\ 7x- & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{(E_2-3E_1)\\ (E_3-7E_1)}}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1\\ & -5y+ & 4z= & -1\\ & -10y+ & 8z= & -2 \end{array}\right. \xrightarrow{(E_3-2E_2)} \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1\\ & -5y+ & 4z= & -1\\ & & 0= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

El sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Vamos a calcularlas:
Despejando y en E_2 y haciendo $z=\lambda$

$$y=\frac{-1-4z}{-5}=\frac{1+4z}{5}=\frac{1+4\lambda}{5}$$

Sustituyendo estos valores en E_1

$$x+\frac{1+4\lambda}{5}-\lambda=1\Longrightarrow x=\frac{\lambda+1}{5}$$

La solución pedida sería:

$$\left\{\begin{array}{rc} x= & \frac{\lambda+4}{5}\\ y= & \frac{4\lambda+1}{5}\\ z= & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 55 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.
$$\left\{\begin{array}{rrr} -x+ & 4y= & -6\\ 2x- & 3y= & 7 \end{array}\right.$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z= & -3\\ 2x+ & 3y- & z= & 3\\ x- & y+ & 3z= & 6 \end{array}\right.$$

Solución:

1.
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 4 & -6\\ 2 & -3 & 7 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A)=Rango(\overline{A})=$nº de incógnitas$=2$, y aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{rr} -6 & 4\\ 7 & -3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{rr} -1 & 4\\ 2 & -3 \end{array}\right|}=2\quad y=\frac{\left|\begin{array}{rr} -1 & -6\\ 2 & 7 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{rr} -1 & 4\\ 2 & -3 \end{array}\right|}=-1$$

2.
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 1 & -3\\ 2 & 3 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 17$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = -\frac{15}{17}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{45}{17}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{54}{17}$$

Problema 56 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.

$$\left\{\begin{array}{rrr} -x+ & 3y = & -5 \\ x+ & y = & 1 \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & 2y- & z = & 0 \\ x- & 3y+ & z = & -3 \\ 2x+ & y- & z = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = -1$$

2.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{14}{3}$$

Problema 57 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.

$$\left\{\begin{array}{rrr} -3x+ & 2y = & 3 \\ 2x- & y = & -1 \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y- & z = & 0 \\ -x+ & 2y+ & z = & 1 \\ x- & 3y- & 2z = & -3 \end{array}\right.$$

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = 3$$

2.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = 2$$

Problema 58 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.

$$\left\{ \begin{array}{rrr} 2x- & y= & 0 \\ 3x+ & y= & 5 \end{array} \right.$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 2 \\ -x+ & 2y+ & z= & 4 \\ 3x+ & y+ & z= & 6 \end{array} \right.$$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{5} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5} = 2$$

2.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 12$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{12} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{12} = 1$$

Problema 59 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.

$$\left\{ \begin{array}{rrr} 3x+ & 2y = & -5 \\ 5x+ & y = & 1 \end{array} \right.$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & z = & 1 \\ -3x+ & y+ & z = & -5 \\ x- & y+ & 3z = & 5 \end{array} \right.$$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -7$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = -4$$

2.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =n$^{\rm o}$ de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 22$$

$$x = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{array}\right|}{22} = 2$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{array}\right|}{22} = 0$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right|}{22} = 1$$

Problema 60 Discute, y resuelve cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y & = & a \\ (a+1)x+ & 2y & +z = & a+3 \\ & 2y & +z = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a \\ a+1 & 2 & 1 & a+3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de a que anulan el determinante de A. $|A| = -a - 1 = 0 \Longrightarrow a = -1$.

Luego si $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3$ =n$^{\rm o}$ de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $a = -1$ tendremos

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

El $Rango(\overline{A}) = 2$ (tiene dos filas iguales)

Tenemos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

En conclusión:

Si $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado.

Si $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

Problema 61 Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ. Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} \lambda x+ & & 2z = & 0 \\ & (\lambda-2)y & + \quad z = & 0 \\ (\lambda-1)x+ & y & - \quad z = & 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de λ que anulan el determinante de A. $|A| = (1-\lambda)(3\lambda-4) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = \frac{4}{3}$.

Luego si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq \frac{4}{3} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 3 =$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado, la solución sería la trivial: $x = y = z = 0$.

Si $\lambda = 1$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Tenemos que $Rango(A) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido tenemos el sistema $\left\{\begin{array}{rrr} x & + & 2z = 0 \\ & -y+ & z = 0 \end{array}\right.$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right.$$

Si $\lambda = \dfrac{4}{3}$ tendremos

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 4/3 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\left|\begin{array}{cc} 4/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{array}\right| = -\dfrac{8}{9} \neq 0$

Tenemos que $Rango(A) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido tenemos el sistema $\left\{\begin{array}{rrr} 4/3x & + & 2z = 0 \\ & -2/3y+ & z = 0 \end{array}\right.$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2}t \\ y = \dfrac{3}{2}t \\ z = t \end{array}\right.$$

Problema 62 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & ay+ & z = & 1 \\ 3x- & y+ & z = & a \\ x+ & y+ & 2z = & 0 \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \left(\begin{array}{rrr} 3 & -a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

y la matriz ampliada $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 3 & -a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5a - 5 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- Si $a \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a = 1: \ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  Observamos que la primera y la segunda fila son iguales y además hay un menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ y por tanto, el Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & y+ & z = & 1 \\ x+ & y+ & 2z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}\lambda \\ \\ y = & -\dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{4}\lambda \\ \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 63 Discutir el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax & -y & +z & = 0 \\ x & +y & +az & = 3 \\ -x & +y & & = 1 \end{array}\right.$$

según los valores del parámetro a. Resolverlo en los casos en que admita infinitas soluciones.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de a que anulan el determinante de A. $|A| = -a^2 + a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1$ y $a = 2$.

Luego si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $a=-1$ tendremos

$$A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A)=2$, ya que $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1\\ -1 & 1 \end{array}\right| = 2\neq 0$ y $|A|=0$

El $Rango(\overline{A})=3$

Tenemos que $Rango(A)\neq Rango(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a=2$ tendremos

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A)=2$, ya que $\left|\begin{array}{rr} 2 & -1\\ 1 & 1 \end{array}\right| = 3\neq 0$ y $|A|=0$

El $Rango(\overline{A})=2$

Tenemos que $Rango(A)=Rango(\overline{A})=2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Resolvemos en este último caso:

Por el menor escogido sabemos que las ecuaciones primera y segunda son linealmente independientes, luego podemos despreciar la tercera.

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -y+ & z & =0\\ x & +y+ & 2z & =3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 2x & -y= & -z\\ x & +y= & 3-2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & 1-t\\ y= & 2-t\\ z= & t \end{array}\right.$$

Problema 64 Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (1+\lambda)x+ & y+ & z= & 1\\ x+ & (1+\lambda)y+ & z= & \lambda\\ x+ & y+ & (1+\lambda)z= & \lambda^2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} (1+\lambda) & 1 & 1\\ 1 & (1+\lambda) & 1\\ 1 & 1 & (1+\lambda) \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} (1+\lambda) & 1 & 1 & 1\\ 1 & (1+\lambda) & 1 & \lambda\\ -1 & 1 & (1+\lambda) & \lambda^2 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de λ que anulan el determinante de A. $|A| = \lambda^2(\lambda + 3) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ y $\lambda = -3$.

Luego si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = -3$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ y $|A| = 0$

El $Rango(\overline{A}) = 3$

Tenemos que $Rango(A) \neq Rango(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 0$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 1$, las tres filas son iguales.

El $Rango(\overline{A}) = 2$

Tenemos que $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$, luego el sistema es incompatible.

Problema 65 Discute y resuelve el siguiente sistema, según los valores del parámetro m:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} mx+ & y & + & z = & 2 \\ x+ & my & & = & 1 \\ x+ & my & + & mz = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 0 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de m que anulan el determinante de A. $|A| = m(m^2 - 1) = 0 \Longrightarrow m = 0$, $m = 1$ y $m = -1$.

Luego si $m \neq 0, 1, -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $m = 0$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

El $Rango(\overline{A}) = 2$ (tiene dos filas iguales)

Tenemos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido tenemos el sistema $\left\{\begin{array}{rrr} & y+ & z = 2 \\ x & & = 1 \end{array}\right.$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{array}\right.$$

Si $m = 1$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2 \neq Rango(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$, luego el sistema es incompatible.
Si $m = -1$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2 \neq Rango(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$, luego el sistema es incompatible.
En conclusión:

Si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 1$ el sistema es incompatible.

Si $m = -1$ el sistema es incompatible.

Si $m \neq 0$, $m \neq 1$ y $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado.

Problema 66 Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x- & y+ & 2z= & 0 \\ -x+ & \lambda y+ & 2z= & 0 \\ 2x+ & \lambda y- & z= & 0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A|=0$ para calcular los valores de λ que anulan el determinante de A. $|A|=-3(\lambda+1)^2=0\Longrightarrow\lambda=-1$.

Luego si $\lambda\neq-1\Longrightarrow|A|\neq0\Longrightarrow Rango(A)=3=$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado, la solución sería la trivial: $x=y=z=0$.

Si $\lambda=-1$ tendremos

$$A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A)=2$, ya que $\left|\begin{array}{rr} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{array}\right|=3\neq0$

Tenemos que $Rango(A)=2<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Cogemos las dos últimas filas, a la vista del menor elegido anteriormente.

$\left\{\begin{array}{rrr} -x- & y+ & 2z=0 \\ 2x- & y- & z=0 \end{array}\right.$ y haciendo $z=t$ nos queda la solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=t \\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 67 Discute el siguiente sistema, y resuélvelo cuando sea posible, en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} & y & + & az= & 1 \\ x+ & & & a^2z= & 2a+1 \\ x- & y & + & a(a-1)z= & 2a \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a(a-1) & 2a \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de m que anulan el determinante de A.

Resulta que $|A| = 0$ siempre e independientemente del valor que tome a.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ resulta que $Rango(A) = 2$ sea cual sea el valor que tome a.

Ahora estudiamos el $Rango(\overline{A})$:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = 0$ Para cualquier valor de a.

$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & a(a-1) & 2a) \end{vmatrix} = 0$ Para cualquier valor de a.

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a+1 \\ -1 & a(a-1) & 2a) \end{vmatrix} = 0$ Para cualquier valor de a.

Luego $Rango(\overline{A}) = 2$ independientemente del valor de a.

En conclusión:

$Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas y por tanto el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a.

Por el menor escogido podemos despreciar la tercera ecuación y nos quedaría el sistema

$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & az = & 1 \\ x & + & a^2z = & 2a+1 \end{array}\right.$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2a+1-a^2t \\ y = 1-at \\ z = t \end{array}\right.$$

Problema 68 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 0\\ & ay+ & 2z= & 4\\ & 2y+ & az= & 4\end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{rrr}1&-1&1\\0&a&2\\0&2&a\end{array}\right)$ y la matriz ampliada $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r}1&-1&1&0\\0&a&2&4\\0&2&a&4\end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\left|\begin{array}{rrr}1&-1&1\\0&a&2\\0&2&a\end{array}\right|=\left|\begin{array}{rr}a&2\\2&a\end{array}\right|=a^2-4=0\Longrightarrow a=\pm 2$$

- Si $a\neq\pm 2\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.

- Para $a=-2:\ A=\left(\begin{array}{rrr}1&-1&1\\0&-2&2\\0&2&-2\end{array}\right)$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r}1&-1&1&0\\0&-2&2&4\\0&2&-2&4\end{array}\right)$

  Tenemos que $|A|=0$ y además hay un menor $\left|\begin{array}{rr}1&-1\\0&-2\end{array}\right|=-2\neq 0$ y por tanto, el Rango$(A)=2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

  $$\left|\begin{array}{rrr}1&-1&0\\0&-2&4\\0&2&4\end{array}\right|=-8-8=-16\neq 0 \text{ y el Rango}(\overline{A})=3.$$

  Concluyendo:
  Rango$(A)=2\neq$ Rango$(\overline{A})=3\Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

- Para $a=2:\ A=\left(\begin{array}{rrr}1&-1&1\\0&2&2\\0&2&2\end{array}\right)$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r}1&-1&1&0\\0&2&2&4\\0&2&2&4\end{array}\right)$

  Sabemos que $|A|=0$, luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$

En la matriz ampliada $\overline{A}$ vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$\overline{A}$ <n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Vamos a resolverlo:

Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la tercera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 0 \\ & 2y+ & 2z = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 0 \\ & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y = & & -z \\ & y = & 2 & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & 2(1-\lambda) \\ y = & 2-\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 69 Analizar la compatibilidad del sistema de ecuacuiones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & az = & 1 \\ 2x- & y+ & z = & 1 \\ 3x+ & ay+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

y resolverlo en el caso de que tenga infinitas soluciones. **Solución**

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A| = 2a(a+1)$, y si hacemos $|A| = 0$ obtenemos los valores $a = -1$ y $a = 0$, que serán los únicos valores que anulan el determinate de A.

Si $a \neq -1$ y $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) =$Rango$(\overline{A}) = 3 =$n^o de incógnitas, luego en este caso el sistema es Compatible Determinado.

Si $a = -1$, como $|A| = 0$ buscamos menores de orden 2, y nos encotramos

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$.

Y por otra parte si

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Buscamos menores de orden 3 y encontramos

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 3$.

Luego si $a = -1 \Longrightarrow$Rango(A) $\neq$Rango$\overline{A}$ $\Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

Si $a = 0$, como $|A| = 0$ buscamos menores de orden 2, y nos encotramos

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$.

Y por otra parte si

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Buscamos menores de orden 3 que sean distintos de cero y comprobamos que

$$|A_1| = |A| = 0, \ \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ \ |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

No hay menores de orden 3 distintos de cero, y si buscamos de orden 2 tenemos el mismo que encontramos anteriormente para A, y el Rango$(\overline{A}) = 2$.

Luego si $a = 0 \Longrightarrow$Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2$ <nº de incógnitas y el sistema es Compatible Ideterminado.

Resolvemos en este caso:

Por el menor elegido podemos eliminar la tercera ecuación del sistema y nos queda:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y+ & & = & 1 \\ 2x- & y+ & z & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2-\lambda}{3} \\ \\ y = \dfrac{1+\lambda}{3} \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 70 Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} ax+ & 2y+ & 6z & = & 0 \\ 2x+ & ay+ & 4z & = & 2 \\ 2x+ & ay+ & 6z & = & a-2 \end{array}\right.$$

1. Discute el sistema según los valores de a.
2. Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a-2 \end{array}\right)$$

$$|A| = 2a^2 - 8 = 0 \Longrightarrow a = 2 \;\; a = -2$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, y en este caso se trata de un sistema Compatible Determinado.

Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{array}\right)$$

Sabemos en este caso que $|A| = 0$, y buscando menores, encontramos que $\left|\begin{array}{rr} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{array}\right| = 20 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Mientras que por otro lado tenemos que $\left|\begin{array}{rrr} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{array}\right| = -128 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$.

Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$, en este caso el sistema sería Incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

Como la primera fila y la tercera son iguales, y además $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow$

Tenemos que Rango(A) $= 2 =$Rango$(\overline{A})$ $<$nº de incógnitas, luego eneste caso se trata de un sistema Compatible Indeterminado.

2. Por el menor elegido en el apartado anterior podemos eliminar la tercera ecuación, después de hacer la sustitución $a = 2$, y nos queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = & 3 - \lambda \\ y = & \lambda \\ z = & -1 \end{array} \right.$$

Problema 71 Estudia, sgún los valores de m, y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuacuiones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 3z = & 1 \\ x+ & my+ & 3z = & 3 \\ & y- & 6z = & 0 \\ & 3y- & z = & 2 \end{array} \right.$$

Solución

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

El rango de A no puede cuatro, ya que sólo hay tres incógnitas. Entre los menores encontramos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 3$, independientemente del valor de m.

Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$; vamos a calcular el determinante de $\overrightarrow{A}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = [F_2 - F_1] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -12m + 58 = 0$$

$$\Longrightarrow m = \frac{29}{6}$$

Si $m \neq \frac{29}{6} \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 \neq$Rango$(\overline{A}) = 4$ en este caso se trata de un Sistema Incompatible.

Si $m = \frac{29}{6} \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas, luego el sistema es Compatible Determinado y, por tanto, tiene solución única.

Por el menor elegido en A, podemos eliminar la segunda ecuación

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 3z = & 1 \\ & y- & 6z = & 0 \\ & 3y- & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{13}{17} \\ \\ y = \dfrac{12}{17} \\ \\ z = \dfrac{2}{17} \end{array} \right.$$

Problema 72 Un almacenista dispone de tres tipos de café: el A, a 980 ptas/kg; el B, a 875 ptas/kg; y el C, a 950 ptas/kg.

Desea hacer una mezcla con los tres tipos de café, para suministrar un pedido de 1050 kg a un precio de 940 ptas/kg.

¿Cúantos kilos de cada tipo de café debe de mezclar, sabiendo que debe poner del tercer tipo el doble de lo que ponga al primero y del segundo juntos?.

Solución:

Sea x la cantidad de café de tipo A.
Sea x la cantidad de café de tipo B.
Sea x la cantidad de café de tipo C.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1050 \\ z = 2(x + y) \\ 980x + 875y + 950z = 987000 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1050 \\ 2x+ & 2y- & z = & 0 \\ 980x+ & 875y+ & 950z = & 987000 \end{array} \right.$$

Sistema que tiene por solución:

$$x = 400, \quad y = 300, \quad z = 350$$

Problema 73 Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.

2. Tomando $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

1. Una matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, $|A| \neq 0$ y recíprocamente.

   $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda = -2\lambda(\lambda - 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0, \ \lambda = 1$$

   Es decir, para estos dos valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, el determinante de la matriz A es cero y por tanto la matriz A no tiene inversa.

   Para que la matriz A tenga inversa tiene que ser $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

2. Si $\lambda = 1$, por el apartado anterior tendríamos que $|A| = 0$. Calculamos el rango de A que deberá de ser menor de 3.
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

   Por tanto, Rango $A = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, ya que es un sistema homogeneo, y por el menor escogido podemos despreciar la primera ecuación; quedará el sistema siguiente:

   $$\left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & y & & = 0 \\ & y & +z & = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} x+ & y & = & 0 \\ & y & = & -z \end{array} \right.$$

Si llamamos $z = t$ tenemos $y = -t$ y $x = t$, es decir, la solución sería:

$$\left\{\begin{array}{rr} x = & t \\ y = & -t \\ z = & t \end{array}\right.$$

Problema 74 Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$, donde I es la matriz identidad.

1. Demostrar que A admite inversa, y obtenerla en función de A.
2. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$, halla para que valores de m se verifica que $B^2 = 2B + I$, y para esos valores escribir la matriz inversa de B

Solución:

1. Tenemos que $A^2 = 2A + I \Longrightarrow A^2 - 2A = I \Longrightarrow (A - 2I)A = I \Longrightarrow A^{-1} = A - 2I$
2. Calculamos B^2

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1+m)^2+1 & 2 \\ 2 & (1-m)^2+1 \end{pmatrix}$$

Como $B^2 = 2B + I$ tendremos

$$\begin{pmatrix} (1+m)^2+1 & 2 \\ 2 & (1-m)^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+m) & 2 \\ 2 & 2(1-m) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+m)+1 & 2 \\ 2 & 2(1-m)+1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} (1+m)^2+1 = 2(1+m)+1 \\ (1-m)^2+1 = 2(1-m)+1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} m^2+2m+2 = & 2m+3 \\ m^2-2m+2 = & -2m+3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2 = 1 \\ m^2 = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow m = \pm 1$$

Para $m = 1$ tenemos: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Para $m = -1$ tenemos: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 75 Resuelve si es posible, la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Estamos ante una ecuación matricial de la forma $AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$, esto quiere decir, que podremos encontrar X siempre que exista A^{-1}. Como $|A| = 0$ resulta que A no puede tener inversa y, por tanto, la ecuación matricial no tiene solución.

Problema 76 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Resolver la ecuación matricial $XA - B = XC$.

2. Calcular la matriz X

Solución:

1. $XA - B = XC \Longrightarrow XA - XC = B \Longrightarrow X(A - C) = B \Longrightarrow$

   $X(A - C)(A - C)^{-1} = B(A - C)^{-1} \Longrightarrow X = B(A - C)^{-1}$.

2. $A - C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   $(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

   $X = B(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 77 Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:
Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\left\{ \begin{array}{lll} x - 14 = & 5(& y + z - 28) \\ x + 10 = & & y + z + 20 \\ x - 42 = & & y - z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126 = 0 \\ x- & y- & z- & 10 = 0 \\ x- & y+ & z- & 42 = 0 \end{array} \right.$$

Multiplicamos la 2ª ecuación por -5 y la sumamos a la 1ª:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126=0 \\ -5x+ & 5y+ & 5z+ & 50=0 \end{array}\right. \Longrightarrow -4x+176=0 \Longrightarrow x=44$$

Ahora por simple sustitución en la 2ª y la 3ª nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{rr} y+z= & 34 \\ y-z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=18 \\ z=16 \end{array}\right.$$

Problema 78 Discutir la existencia de soluciones del siguiente sistema según valores del parámetro α. Resolver, si es posible, para $\alpha = 10$.

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -z & =1 \\ x & -2y & +z & =3 \\ 5x & -5y & +2z & =\alpha \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & \alpha \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de α que anulan el determinante de A.

Tenemos que $|A| = 0$, y como $\left|\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right| = -5 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$.

Ahora analizamos el rango de $\overline{A}$ para diferentes valores de α. Los determinantes que se pueden obtener, a parte del de A, son los siguientes:

$$\left|\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -5 & \alpha \end{array}\right| = 50-\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 10$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & \alpha \end{array}\right| = 3\alpha - 30 = 0 \Longrightarrow \alpha = 10$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & \alpha \end{array}\right| = 10-\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 10$$

Luego si $\alpha \neq 10 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$, y por tanto, el sistema es incompatible.

Si $\alpha = 10 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 2 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Vamos a resolver el sistema en este caso.

Por el menor elegido sabemos que las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes, y por tanto, se puede despreciar la tercera. El sistema sería el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x+ & y & -z & =1 \\ x- & 2y & +z & =3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 2x+ & y & =1+z \\ x- & 2y & =3-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rc} x= & \dfrac{5+t}{5} \\ \\ y= & \dfrac{-5+3t}{5} \\ \\ z= & t \end{array}\right.$$

Problema 79 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & z= & 2 \\ x+ & y+ & az= & 2 \\ -ax & & -z= & -a \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{rrr} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{array}\right)$

y la matriz ampliada $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ -a & 0 & -1 & -a \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\left|\begin{array}{rrr} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{array}\right| = 1-a^2=0 \Longrightarrow a=\pm 1$$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow$ Rango(A) $=$ 3 $=$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a=-1$: $A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A|=0$ y además hay un menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0$

y por tanto, el Rango$(A) = 2$.

Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y el Rango}(\overline{A}) = 3.$$

Concluyendo:
Rango$(A) = 2 \neq$ Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

- Para $a = 1:\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Sabemos que $|A| = 0$, luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$$

En la matriz ampliada $\overline{A}$ vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$\overline{A}$ <n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Vamos a resolverlo:

Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la primera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x & +y+ & z = & 2 \\ -x & - & z = & -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 2 \\ x & + & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{lrrr} x+ & y = & 2 & -z \\ x & = & 1 & -z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1-\lambda \\ y = & 1 \\ z = & \lambda \end{array} \right.$$

Problema 80 Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ;\ B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de k para los que la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.
2. Halla los valores de k para los que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa.

Solución

1. Primero calculamos el producto de $A \cdot B$:
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Ahora calculamos el determinanate:
$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k - (-k + k(-2+2k)) = 0$$
Independientemente del valor de k, luego $A \cdot B$ no tiene inversa, sea cual sea el valor de k.

2. Primero calculamos el producto de $B \cdot A$:
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$
Ahora calculamos el determinanate:
$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3$$
Esta expresión no se anula nunca, luego siempre existirá inversa de $B \cdot A$, sea cual sea el valor de k.

Problema 81 Se consideran las matrices
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinar x e y para que $MN = NM$
2. Calcular M^{2000} y M^{2001}

Solución:

1. Determinar x e y para que $MN = NM$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x = & 0 \\ y = & 1 \end{array} \right.$$

2. Calcular M^{2000} y M^{2001}

   Para calcular estas potencias multiplicamos sucesivamente M hasta que los resultados se repitan:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = I_3 \cdot M = M$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = M \cdot M = M^2 = I_3$$

   En general:

   $M^n = M$ si n es impar $\Longrightarrow M^{2001} = M$.

   $M^n = I_3$ si n es par $\Longrightarrow M^{2000} = I_3$.

Problema 82 Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

1. Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresa M^{-1} en términos de M e I.
2. Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.
3. Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

1. Tenemos $M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow (M - 2I)M = 3I \Longrightarrow \frac{1}{3}(M - 2I)M = I \Longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$

2. Tenemos $M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow M^2 = 3I + 2M$
Por otra parte $M^3 = M^2 \cdot M = (3I + 2M)M = 3I \cdot M + 2M^2$, si volvemos a sustituir M^2 nos queda:
$$M^3 = 3I \cdot M + 2(3I + 2M) = 3M + 6I + 4M = 7M + 6I$$

3. Primero calculamos M^2:
$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$
Sustituimos en la expresión:
$$M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a^2 + b^2 - 2a & = 3 \\ 2b(a - 1) & = 0 \end{array} \right.$$
Si $b = 0$ en la segunda ecuación, al sustituir este resultado en la primera obtendremos dos valores de a, que serían los resultados de la ecuación $a^2 - 2a - 3 = 0$, es decir, $a = 3$ y $a = -1$. Las matrices M obtenidas serían:
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Si $a = 1$ en la segunda ecuación, al sustituir este resultado en la primera obtendremos dos valores de b, que serían los resultados de la ecuación $b^2 = 4$, es decir, $b = 2$ y $b = -2$. Las matrices M obtenidas serían:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 83 Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad.

Calcular lo que tienen cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 euros.

Solución:

Sean x, y, z el dinero de Luis, Juan y Óscar, respectivamente.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2x}{3}=y+\dfrac{x}{3}=z \\ \\ x+y+z=60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x- & 3y & & = & 0 \\ 2x- & & 3z & = & 0 \\ x+ & y & +z & = & 60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=10 \\ z=20 \end{array}\right.$$

Problema 84 Cuatro colegiales llamados Luis, Javier, Enrique y Fermín se juntan en el recreo para intercambiar cromos. Fermín tiene cinco cromos más que Luis y Javier juntos, Enrique tiene el doble de cromos que Javier, y Javier tiene 90 cromos menos que Fermín y Enrique juntos. Calcula los cromos que tienen entre los cuatro.

Solución:
Sea x los cromos de Luis, y los cromos de Javier, z los cromos de Enrique, y h los cromos de Fermín.

$$\left\{\begin{array}{l} h=5+x+y \\ z=2y \\ y+90=h+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrr} x+ & y & & -h & = & -5 \\ & 2y- & z & & = & 0 \\ & y- & z & -h & = & -90 \end{array}\right.$$

Multiplicamos la 3ª ecuación por -2 y la sumamos a la 2ª nos queda

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x+ & y & & -h & = & -5 \\ & 2y- & z & & = & 0 \\ - & 2y+ & 2z & +2h & = & 180 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrr} x+ & y & & -h & = & -5 \\ & 2y- & z & & = & 0 \\ & & z & +2h & = & 180 \end{array}\right.$$

Y si ahora sumamos la primera y la tercera nos queda $x+y+z+h=175$ que es lo que nos pedía el problema.

Problema 85 Discutir según el valor del parámetro real λ el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y+ & z & = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z & = & 3 \\ 3x+ & 4y+ & \lambda z & = & \lambda \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda & \lambda \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 5$$

- Si $\lambda \neq 5 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.

- Para $\lambda = 5$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A| = 0$ y además hay un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y por tanto, el Rango$(A) = 2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay dos columnas iguales, la última y la penúltima, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

  Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A})$ <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

  Vamos a resolverlo:

  Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la tercera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y = & 1 & -z \\ x+ & 2y = & 3 & -3z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x = & -1+ & h \\ y = & 2- & 2h \\ z = & & h \end{array} \right.$$

Problema 86 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcular $3A \cdot A^t - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

2. Resolver la siguiente igualdad matricial:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

1. La matriz $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ por lo que tenemos lo siguiente:

$$3A \cdot A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Tenemos que $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$. El hecho de que A tenga inversa nos permite resolver la ecuación matricial de la siguiente manera:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 87 Determinar para que valores de x tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$

y hallala en función de x

Solución:

- Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de cero, veamos los valores de x que anulan el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

En conclusión, la matriz A tiene inversa siempre que $x \neq 0$.

- Calculamos A^{-1}

$$A^{-1} = A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\left[\begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix}\right]}{-2x^2} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 & -x & x \\ -2x^2 & x^2 & x^2 \\ 0 & -x & -x \end{pmatrix}}{-2x^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2x} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2x} & \frac{1}{2x} \end{pmatrix}$$

Problema 88 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+2)x+ & (m-1)y- & z = 3 \\ mx- & y+ & z = 2 \\ x+ & my- & z = 1 \end{cases}$$

1. (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.
2. (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

Solución:

1. Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{cases} 3x+ & & z = 3 \\ x- & y+ & z = 2 \\ x+ & y- & z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} (m+2)x+ & (m-1)y- & z = 3 \\ mx- & y+ & z = 2 \\ x+ & my- & z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m(m+1)$$

$$-m(m+1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$A$ =Rango$\overline{A}$ = 3 =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

- Cuando $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$

En conclusión, cuando $m = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m = -1 \Longrightarrow |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$

En conclusión, cuando $m = -1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, luego en este caso también el sistema es incompatible.

Problema 89 Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

Problema 90 Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda x + 3y = & 3x + 9y \\ y = & 3y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda z + 3h = & 3z + 9h \\ h = & 3h \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)z = 0 \\ h = 0 \end{array} \right.$$

En conclusión, $\lambda = 3$ y x y z pueden ser cualquier valor que no cumpla $x = z = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 91 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular A^{-1}
2. Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Solución

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $AX = BA \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}BA \Longrightarrow IX = A^{-1}BA \Longrightarrow$ $X = A^{-1}BA$ Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 92 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real λ definimos $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

1. Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.

2. Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ.

Solución:

1. $B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

   $|B| = 0 \Longrightarrow (2-\lambda)\cdot(-2-\lambda) - (-3) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$

2. Si $\lambda = 1 : B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(B) = 1$ El sistema sería compatible indeterminado.

   $x - 3y = 0 \Longrightarrow x = 3y$ Las soluciones serían de la forma: $\begin{cases} x = & 3t \\ y = & t \end{cases}$

3. Si $\lambda = -1 : B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(B) = 1$ El sistema sería compatible indeterminado.

$3x - 3y = 0 \Longrightarrow x = y$ Las soluciones serían de la forma: $\left\{ \begin{array}{rl} x = & t \\ y = & t \end{array} \right.$

Problema 93 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} ax+ & 7y+ & 20z = & 1 \\ ax+ & 8y+ & 23z = & 1 \\ x- & & az = & 1 \end{array} \right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 7 & 20 \\ a & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 7 & 20 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 21 - 20 = 1 - a^2$$

$|A| = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow rango(A) = 3 = rango(\overline{A}) \Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a = -1$: $\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ -1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 21 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

- Para $a = 1$: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -21 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Compatible indeterminado.}$$

Soluciones para $a = 1$: $z = t$, $y = -3t$, $x = 1 - 7 \cdot (-3t) - 20t = 1 + t$.

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & 1 + t \\ y = & -3t \\ z = & t \end{array}\right.$$

Problema 94 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Hallar A^n para todo entero positivo n.
2. Calcular, si existe, la inversa de la matrtiz A y la de la matriz $I_3 + A$.

Solución:

1. Calculamos las potencias de A:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots$$

Es decir:

$$A^n = \left\{\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n = 1 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n = 2 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n \geq 3 \end{array}\right.$$

2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir, para cualquier valor de a se cumple que $|A| = 0$, y por tanto A no tiene inversa. Por otro lado:

$$|A+I_3| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Longrightarrow |A+I_3| = 1$$

Es decir, para cualquier valor de a se cumple que $|A+I_3| \neq 0$, y por tanto tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 95 Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus determinantes:
$|A_1| = -(a+4)(a-2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = 2$
$|A_2| = 8(a+4) = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_3| = 12a + 48 = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_4| = (a+4)(3a+2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = -\frac{2}{3}$ El único valor de a que anula todos los determinantes es $a = -4$. Además tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.
Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:
Si $a = -4$ el rango de A es 2

Si $a \neq -4$ el rango de A es 3

Problema 96 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ ax+ & y+ & 2z & = 0 \\ x- & y+ & az & = 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.
2. (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.
3. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

1. Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular los valores de a que anulan el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad a = -1$$

Es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ tendríamos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 = n^o$ de incognitas; el sistema sería compatible determinado.
Si $a = 0$:

- Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

- Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 3$$

- En conclusión si $a = 0$ el sistema sería incompatible.

2. Si $a = -1$:

   - Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

   $$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

   - Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos comprobar:

   $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

   Es decir, $Rango(\overline{A}) = 2$.

   - En conclusión, si $a = -1$: $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$n^o de incognitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

3. Si $a = -1$ ya hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, resolvemos:

   $$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ -x+ & y+ & 2z & = 0 \\ x- & y- & z & = 1 \end{array} \right.$$

   Si a la primera le restamos la tercera nos queda $z = 1$ y si hacemos $y = \lambda$ tendríamos el resultado:

   $$\left\{ \begin{array}{rll} x = & 2+ & \lambda \\ y = & & \lambda \\ z = & 1 & \end{array} \right.$$

4. Si $a = 2$ ya hemos comprobado que el sistema sería compatible determinado, resolvemos:

   $$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ 2x+ & y+ & 2z & = 0 \\ x- & y+ & 2z & = 1 \end{array} \right.$$

   Si a la tercera le restamos la primera tenemos: $2z = -1 \Longrightarrow$

$$z=-\frac{1}{2}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrr} x- & y= & 2\\ 2x+ & y= & 1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rr} x= & 1\\ y= & -1\end{array}\right.$$ Es decir:

$$\left\{\begin{array}{rr} x= & 1\\ \\ y= & -1\\ \\ z= & -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Problema 97 Dadas las matrices

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{ccr} 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right)$$

1. Determinar la matriz inversa de B.
2. Determinar una matriz X tal que $A=B\cdot X$.

Solución:

1.

$$B^{-1}=\left(\begin{array}{rrr} 4/3 & -1/3 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1/3 & -1/3 & 0\end{array}\right)$$

2. $A=BX\Longrightarrow B^{-1}A=B^{1}BX\Longrightarrow B^{-1}A=X$

$$X=\left(\begin{array}{rrr} 4/3 & -1/3 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1/3 & -1/3 & 0\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrr} 4/3 & 1/3 & -11/3\\ -1 & 1 & 5\\ 1/3 & 1/3 & -2/3\end{array}\right)$$

Problema 98 Se pide:

1. Si A es una matriz tal que $A^2=\left(\begin{array}{cc} 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right)$, ¿cuál es el valor del determinante de A?
2. Calcular un número k tal que:

$$\left[\left(\begin{array}{rr} 3 & -4\\ 1 & -1\end{array}\right)-k\cdot\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right)\right]^2=\left(\begin{array}{cc} 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right)$$

Solución:

1. $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 0 \Longrightarrow |A| = 0$
2. $$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} k^2-6k+5 & 8(k-1) \\ 2-2k & k^2+2k-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Tenemos que:
$$\left.\begin{array}{l} k^2-6k+5=0 \\ 8(k-1)=0 \\ 2-2k=0 \\ k^2+2k-3=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow k=1$$

Problema 99 .

1. Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema
$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 3y+ & z= & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & \lambda z= & 1 \\ x+ & y- & z= & 1 \end{array}\right.$$
2. Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

Solución:

1. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$|A| = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2,\ \ \lambda = -1$$
Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $\lambda = 2$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
Observamos que la tercera fila es la resta de la primera menos la segunda, y teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, podemos concluir en este caso:

Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $= 2 <$n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Basta observar las columnas de la matriz para darnos cuenta que la primera y la cuarta son iguales y la tercera está multiplicada por -1. Si tenemos en cuenta que $\left| \begin{array}{rr} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = -4 \neq 0$, podemos concluir en este caso:

Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $= 2 <$n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

2.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y+ & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & 2z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y = & 2- & z \\ x+ & 2y = & 1- & 2z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lr} x = & 1 + 4t \\ y = & -3t \\ z = & t \end{array} \right.$$

Problema 100 1. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z = 1 \\ 2x+ & y- & z = 2 \end{array} \right.$$

2. Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

1.

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z = 1 \\ 2x+ & y- & z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y & = 1- & 3z \\ 2x+ & y & = 2+ & z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{5}{3}t \\ \\ y = -\dfrac{7}{3}t \\ \\ z = t \end{array} \right.$$

2. Para que el sistema siga siendo compatible indeterminado esta última ecuación tiene que ser combinación lineal de las dos anteriores, es decir, si ponemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{array} \right)$$

sería $a(1,2,3,1)+b(2,1,-1,2) = (5,1,\alpha,\beta) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+2b=5 \\ 2a+b=1 \end{array} \right. \Longrightarrow$
$a=-1,\ b=3 \Longrightarrow \alpha=-6,\ \beta=5$

Problema 101 *(2 puntos)* Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA = B$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Primero resolvemos la ecuación matricial:

$$A^{-1}XA = B \Longrightarrow XA = AB \Longrightarrow X = ABA^{-1}$$

Ahora calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{(Adjt(A))^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Problema 102 Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & y+ & z= & 3 \\ mx+ & (m-1)y+ & 3z= & 2m-1 \\ x+ & 2y+ & (m-2)z= & 4 \end{array} \right.$$

1. Discutirlo según los distintos valores de m.
2. Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

1. Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & 1 & 3 \\ m & m-1 & 3 & 2m-1 \\ 1 & 2 & m-2 & 4 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow |A| = (m-2)(m+1)(m-4) = 0 \Longrightarrow m = 2,\ m = -1,\ m = 4$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ y $m \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =n^{o} incógnitas luego en este caso el sistema sería compatible determinado.

Si $m = -1$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{rr} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{array} \right| = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{array} \right| = 5 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$A$ $\neq$Rango$\overline{A} \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{array} \right| = -4 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$A$ $\neq$Rango$\overline{A} \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 4$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{array} \right| = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, que está claro que es dos, ya que la última fila es la resta de las dos anteriores.

Luego en este caso Rango$A$ =Rango$\overline{A} = 2 <$n^{o} incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

2. Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & y+ & z=3 \\ 4x+ & 3y+ & 3z=7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & y= & 3- & z \\ 4x+ & 3y= & 7- & 3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5} \\ \\ y=\dfrac{9}{5}-\lambda \\ \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Capítulo 2

Problemas de Geometría

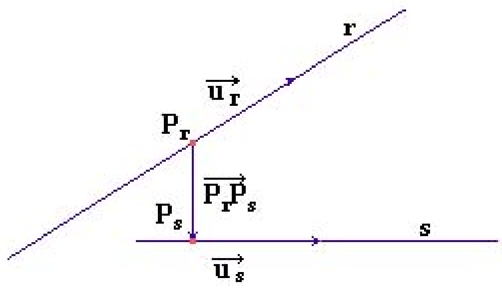
Problema 103 Se consideran las rectas:

$$r:\ \frac{x-1}{2}=y=\frac{z-\alpha}{-1}$$
$$s:\ \frac{x+1}{3}=y-2=z$$

1. Analizar en función de α la posición relativa de las dos rectas.
2. Para $\alpha=14$ escribir la ecuación del plano π que contiene a ambas rectas.
3. Hallar la perpendicular común a las rectas s y t siendo t la siguiente recta:

$$t:\ x=\frac{y}{2}=\frac{z}{-2}$$

Solución:

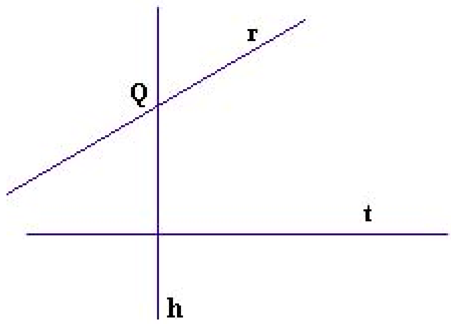


$$r:\ \left\{\begin{array}{l} P_r(1,0,\alpha)\\ \overrightarrow{v_r}=(2,1,-1)\end{array}\right. \qquad s:\ \left\{\begin{array}{l} P_s(-1,2,0)\\ \overrightarrow{v_s}=(3,1,1)\end{array}\right.$$

1. Vamos a ver para que valores de α los vectores $\vec{v_r}$, $\vec{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$ son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha - 14 = 0 \Longrightarrow \alpha = 14$$

Si $\alpha \neq 14$ el determinante es distinto de cero, lo que quiere decir que los tres vectores son linealmente independientes, y por tanto, las dos rectas se cruzan.
Si $\alpha = 14$ el determinante es cero y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ esto quiere decir que $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ son linealmente independientes, y por tanto, $\overrightarrow{P_rP_s}$ depende linealmente de $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$, en conclusión las rectas r y s se cortan.



2. Replanteamos datos:

$$t : \begin{cases} P_t(0,0,0) \\ \vec{v_t} = (1,2,-2) \end{cases} \quad s : \begin{cases} P_s(-1,2,0) \\ \vec{v_s} = (3,1,1) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{P_sP_t} = (1,-2,0)$$

Veamos que posición relativa tienen s y t:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Longrightarrow \text{las dos rectas se cruzan.}$$

Tenemos que calcular la recta h perpendicular común a s y t, es decir, una recta cuyo vector director vendría determinado por:
$\vec{v_h} = \vec{v_s} \times \vec{v_t}$

$$\vec{v_h} = \vec{v_s} \times \vec{v_t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4,7,5)$$

Ahora hallamos el plano π, que conteniendo a t es perpendicular a la recta s. Este plano y la recta s se cortarán en un punto Q.
Para construir π tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_h}=(-4,7,5) \\ \overrightarrow{v_t}=(1,2,-2) \\ P_t(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi \equiv \left|\begin{array}{ccc} -4 & 1 & x-0 \\ 7 & 2 & y-0 \\ 5 & -2 & z-0 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi: 8x+y+5z=0; \quad s: \left\{\begin{array}{l} x=-1+3\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Ahora buscamos el punto de corte:

$8(-1+3\lambda)+(2+\lambda)+5\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{1}{5}$

Luego el punto Q será: $\left\{\begin{array}{l} x=-1+3\cdot\frac{1}{5} \\ y=2+\frac{1}{5} \\ z=\frac{1}{5} \end{array}\right.$ Es decir: $Q(-\frac{2}{5},\frac{11}{5},\frac{1}{5})$

Tenemos por tanto: $h=\left\{\begin{array}{l} Q(-\frac{2}{5},\frac{11}{5},\frac{1}{5}) \\ \overrightarrow{v_h}=(-4,7,5) \end{array}\right.$

Por lo que concluiremos:

$$h: \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{2}{5}-4\cdot\lambda \\ y=\frac{11}{5}+7\cdot\lambda \\ z=\frac{1}{5}+5\cdot\lambda \end{array}\right.$$

Problema 104 Se considera la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r: \left\{\begin{array}{rr} x= & 2t \\ y= & t \\ z= & 0 \end{array}\right. \text{ y el plano } \pi: \ x+y+z-1=0$$

Determinar las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta y cuya distancia al plano π sea igual que su distancia al origen de coordenadas. ¿Es único este punto?. Contestar razonadamente.

Solución:
LLamaríamos $O(0,0,0)$ al origen de coordenadas, y $P(x,y,z)$ a un punto que por estar sobre la recta r tendría de coordenadas $P(2t,t,0)$; aplicando las fórmulas de distancia a un plano, y distancia a otro punto tendremos:

$$d(O,P)=\sqrt{(2t)^2+t^2}=\sqrt{4t^2+t^2}=t\sqrt{5}$$

$$d(P,\pi)=\frac{|2t\cdot 1+t\cdot 1+0\cdot 1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|2t+t-1|}{\sqrt{3}}$$

Como $d(O,P)=d(P,\pi) \Longrightarrow t\sqrt{5}=\frac{|3t-1|}{\sqrt{3}} \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{lll} t\sqrt{5}= & \frac{3t-1}{\sqrt{3}} & \Longrightarrow t=\frac{1}{3-\sqrt{15}} \\ t\sqrt{5}= & -\frac{3t-1}{\sqrt{3}} & \Longrightarrow t=\frac{1}{3+\sqrt{15}} \end{array}\right.$$

Sustituyendo t en r se obtienen los puntos pedidos:

$$P(\frac{2}{3-\sqrt{15}},\frac{1}{3-\sqrt{15}},0) \text{ y } P'(\frac{2}{3+\sqrt{15}},\frac{1}{3+\sqrt{15}},0)$$

Esta claro que el punto no es único, ya que como hemos visto son dos los que cumplen la condición del problema.

Problema 105 Se consideran las rectas r_1 y r_2 dadas por:

$$r_1:\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z= & 0 \\ 2x- & 3y+ & z= & 1 \end{array}\right. \quad r_2=:\left\{\begin{array}{rrr} x= & & 3t \\ y= & 1- & 2t \\ z= & 2+ & t \end{array}\right.$$

Encontrar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto de intersección de r_2 con el plano $\pi = x-3y-2z+7=0$

Solución

Hallamos el punto de corte entre π y r_2 por simple sustitución, es decir, $3t-3(1-2t)-2(2+t)+7=0 \Longrightarrow t=0$ y sustituyendo ahora este valor en r_2 obtendríamos el punto $P(0,1,2)$.

Ahora vamos a pasar la recta r_1 a paramétricas:

$$r_1:\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & 2z=0 \\ 2x- & 3y+ & z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y= & 2t \\ 2x- & 3y= & 1-t \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rr} 2x+2y= & 4t \\ 2x-3y= & 1-t \end{array}\right. \Longrightarrow 5y=5t-1 \Longrightarrow y=\frac{5t-1}{5}$$

$$x=2t-\frac{5t-1}{5}=\frac{5t+1}{5}$$

Nos quedaría:

$$r_1:\left\{\begin{array}{rrr} x= & \frac{1}{5} & +t \\ y= & -\frac{1}{5} & +t \\ z= & & t \end{array}\right. \quad r_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u}=(1,1,1) \\ P_r(\frac{1}{5},-\frac{1}{5},0) \end{array}\right.$$

Calculamos ahora $\overrightarrow{P_rP}=(0-\frac{1}{5},1+\frac{1}{5},2-0)=(-\frac{1}{5},\frac{6}{5},2)$.

El plano buscado lo obtendríamos con los siguientes datos:

$$\left\{\begin{array}{l} P(0,1,2) \\ \overrightarrow{u}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{P_rP}=(-\frac{1}{5},\frac{6}{5},2) \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & x-0 \\ 1 & \frac{6}{5} & y-1 \\ 1 & 2 & z-2 \end{vmatrix} = 4x - 11y + 7z - 3 = 0$$

Problema 106 Sean r la recta determinada por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, -1, -1)$ y s la recta de ecuaciones: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$.
Se pide:

1. Su posición relativa.
2. Hallar, si existe, una recta que pase por el punto $C = (1, 2, 4)$ y que corte a las rectas r y s.

Solución:

1. La recta r pasa por los puntos A y B, para construirla calculamos el vector director de ella $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0)$
   Vamos a escribir las dos rectas en forma paramétrica:
   $$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \\ z = -1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$
   Los vectores directores de ambas rectas no son paralelos, $\overrightarrow{u_r} = (0, -1, 0)$ y $\overrightarrow{u_s} = (2, 5, 3)$. Lo que quiere decir que, o bien se cortan o bien se cruzan. Vamos a resolverlo mediante un sistema:
   $$\left.\begin{array}{ll} 3 + 2\lambda = 1 & (1) \\ 5\lambda = -1 - t & (2) \\ 3\lambda = -1 & (3) \end{array}\right\} \text{Despejando } \lambda \text{ de (1) y (3) tenemos:}$$
   De (1) $\Longrightarrow$ $\lambda = -1$

   De (3) $\Longrightarrow$ $\lambda = -\frac{1}{3}$

   Como los dos valores de λ son diferentes, concluimos con que las dos rectas se cruzan.

2. Si construimos el plano π_1 determinado por la recta r y el punto C, y construimos el plano π_2 determinado por la recta s y el punto C. Por tanto, la recta pedida sería la intersección de estos dos planos.

   - Calculamos π_1:
   $$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{AC} = (0, 2, 5) \\ A(1, 0, -1) \end{cases}$$
   $$\pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 5 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -5(x-1) = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - 1 = 0$$

- Calculamos π_2:

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_s} = (2,5,3) \\ \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{PC} = (-2,2,4) \\ P(3,0,0) \end{array} \right.$$

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & -2 & x-3 \\ 5 & 2 & y \\ 3 & 4 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_2 : x - y + z - 3 = 0$$

Ahora resolvemos el sistema formado por ambos planos, para comprobar que se trata de una recta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = x + z - 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Que sería la recta que nos piden.

Problema 107 Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \;\; ; \;\; C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

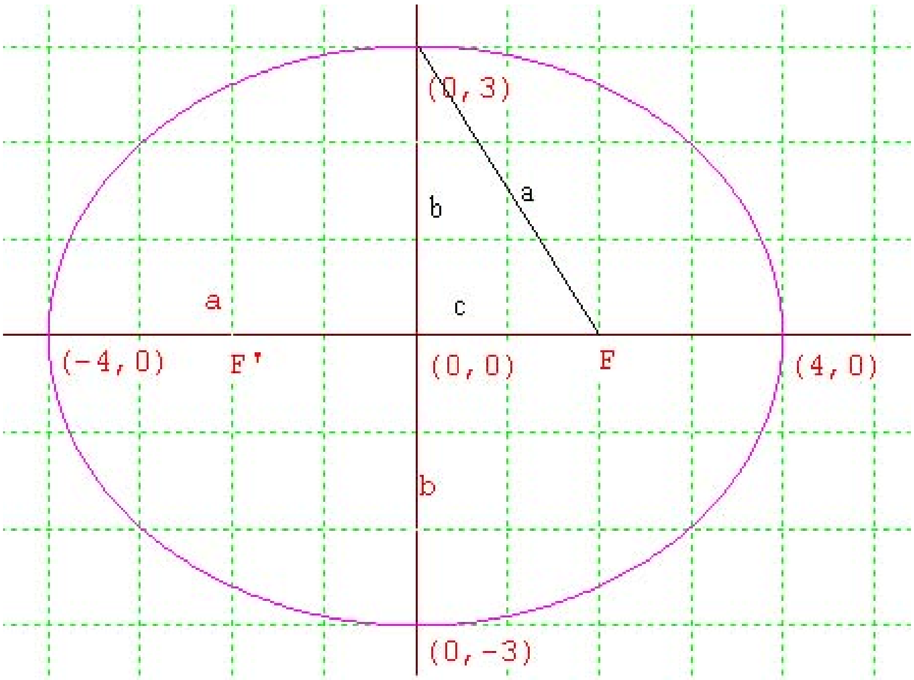
1. Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

2. Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Solución:

1. $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.
   Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$.
   Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
   Podemos concluir:

   - Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
   - Vértices: $(-4,0)$ $(0,3)$ $(0,-3)$ $(4,0)$
   - Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
   - Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.



$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.
Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{16+9} = 5$
Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$
Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$
Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0, 0)$ las rectas buscadas serían:

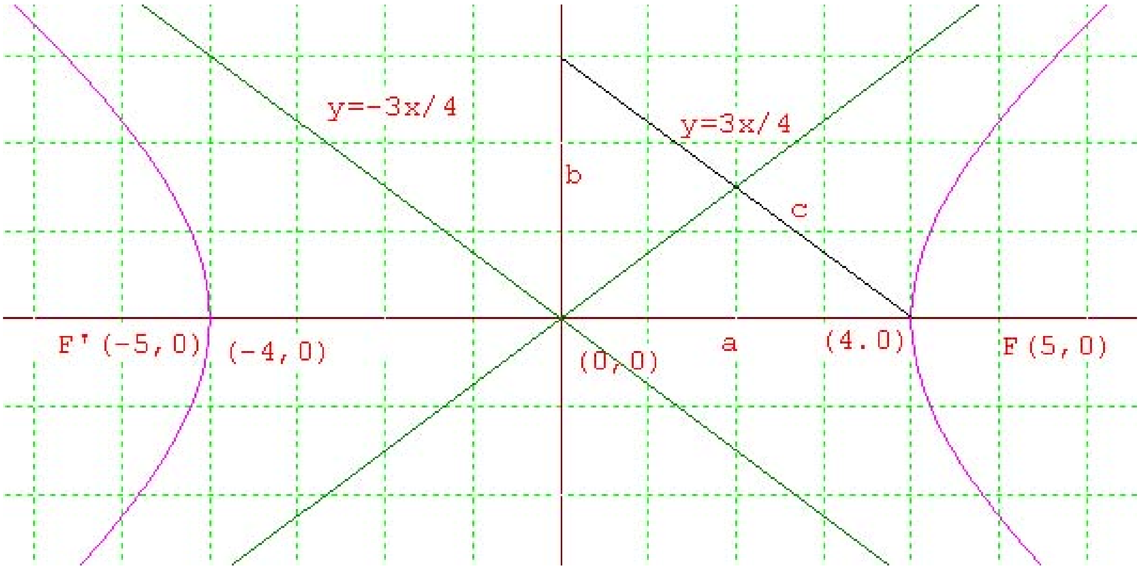
$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

Podemos concluir:

- Focos: $(-5, 0) \quad (5, 0)$
- Vértices: $(-4, 0) \quad (4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:

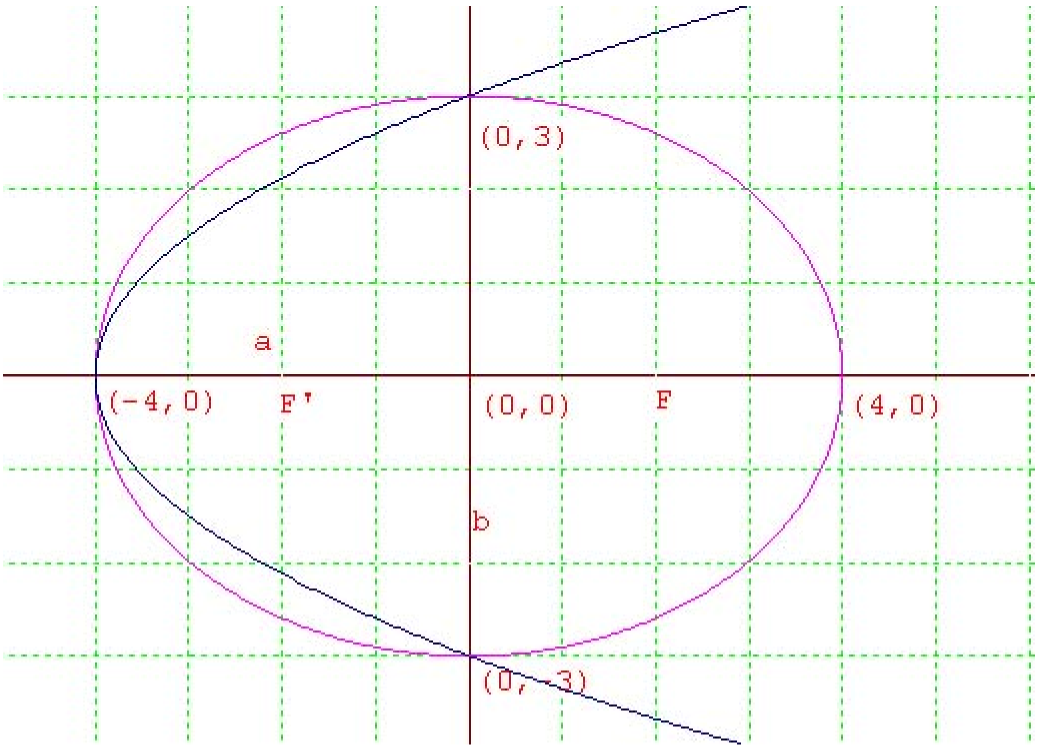
$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

2. La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abcisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el



problema.

Como pasa por el vértice $(-4, 0), (0, 3), (0, -3)$ por sustitución ten-



dremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:

$$\left\{\begin{array}{rlll} -4 = & & & c \\ 0 = & 9a+ & 3b+ & c \\ 0 = & 9a- & 3b+ & c \end{array}\right. \Longrightarrow c=-4,\ a=\frac{4}{9}\ y\ b=0 \Longrightarrow x=\frac{4}{9}y^2-4$$

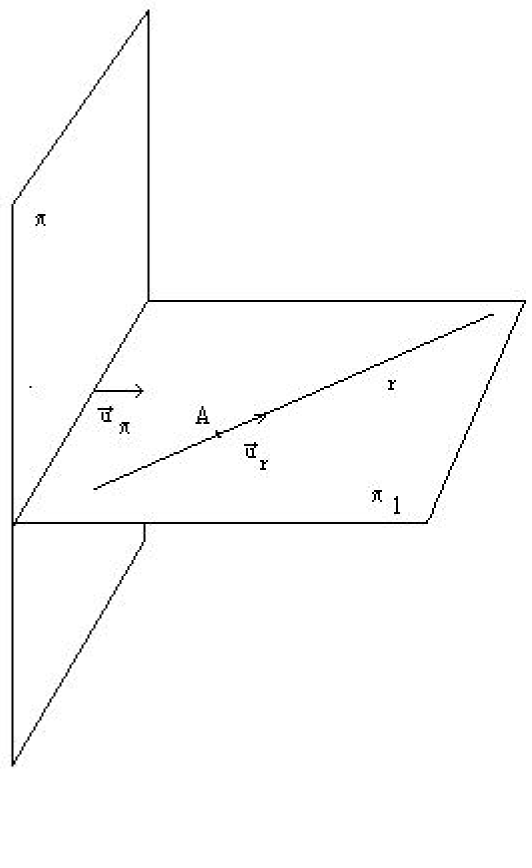
Problema 108 Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:



$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ A(1,-1,0) \end{array}\right. \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases}$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

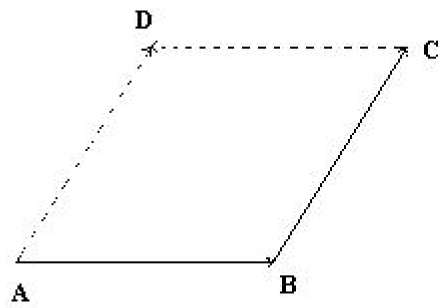
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 109 Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

1. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

2. Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:



1. Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 1)$.
   Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (-1, 1, 1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ $z_0 = 2$, el punto será $D(0, 2, 2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 1, 1)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 110 Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{array} \right. \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{array} \right.$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 111 Los puntos $A(1,1,0)$, $B(2,1,3)$, $C(2,3,-1)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

1. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

2. Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

1. Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1,0,3)$ y $\overrightarrow{BC} = (0,2,-4)$.
Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (0,2,-4) = (x_0-1, y_0-1, z_0)$ y por tanto $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ $z_0 = -4$, el punto será $D(1,3,-4)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-6,4,2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{14}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0+4+16} = \sqrt{20}$$

Es decir, los lados del paralelogramo no son iguales, y por tanto, sólo queda por comprobar si es un rectángulo, para comprobarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un rectángulo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1,0,3)$ y $\overrightarrow{AD} = (0,2,-4)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{200}} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

no es rectángulo.

Problema 112 Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & x- & 2y+ & 3z & -4=0 \\ \pi_2: & 2x+ & y+ & z & +1=0 \\ \pi_3: & -2x+ & 4y- & 6z & =0 \end{array}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & 3z & -4=0 \\ 2x+ & y+ & z & +1=0 \\ -2x+ & 4y- & 6z & =0 \end{array}\right.$$

Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el determinante de A.

$$|A|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right|=0$$

Pero podemos encontrar el menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}A = 2$

Calculamos ahora el rango de $\overline{A}$, calculamos el determinante
$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right| = -40 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3.$

En conclusión $\text{Rango}A = 2 \neq \text{Rango}\overline{A} = 3$ y tendremos que compararlos dos a dos; comparamos π_1 y π_3:

$$\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}=\frac{3}{-6}\neq\frac{-4}{0}$$

Esto quiere decir que π_1 y π_3 son paralelos, y por tanto, π_2 corta a los dos.

Problema 113 Probar que las rectas

$r: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

$s: \left\{\begin{array}{rrrr} x- & y- & z= & 1 \\ 2x- & 2y+ & z= & -1 \end{array}\right.$

se cortan en un punto y calcular el ángulo que forman.

Solución:

Calculamos el vector director de la recta s:

$$\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right| = -3i-3j=(-3,-3,0)=-3(1,1,0)$$

Calculamos un punto de s, para ello hacemos $x = 0$, y obtenemos $P_2(0, 0, 1)$.
En resumen, podemos escribir lo siguiente:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} P_1(3, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} P_1(0, 0, -1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 0) \end{array} \right.$$

Calculamos un vector $\overrightarrow{P_2P_1} = (3, 2, 2)$ y construimos las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Como el rango de A es dos, ya que $\left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0$ y además $|\overline{A}| = 0$ podemos concluir que Rango$A$ =Rango$\overline{A} = 2$, luego las dos rectas se cortan.

$$\cos\alpha = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \alpha = 45^{\text{o}}$$

Problema 114 Hallar la ecuación de los planos paralelos al plano $2x + y - z = 2$ y estén a una distancia $d = 3$ de él.
Solución:
Sea el punto $P(x, y, z)$, si este punto está a una distancia $d = 3$ del plano dado debe de cumplir que

$$\frac{|2x + y - z - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 3 \Longrightarrow |2x + y - z - 2| = 3\sqrt{6}$$

Obtendremos dos planos:

$$\pi_1 : 2x+y-z-2 = -3\sqrt{6} \Longrightarrow 2x+y-z-2+3\sqrt{6} = 0 \Longrightarrow 2x+y-z+5.348469228 = 0$$

$$\pi_2 : 2x+y-z-2 = 3\sqrt{6} \Longrightarrow 2x+y-z-2-3\sqrt{6} \Longrightarrow 2x+y-z-9.348469228 = 0$$

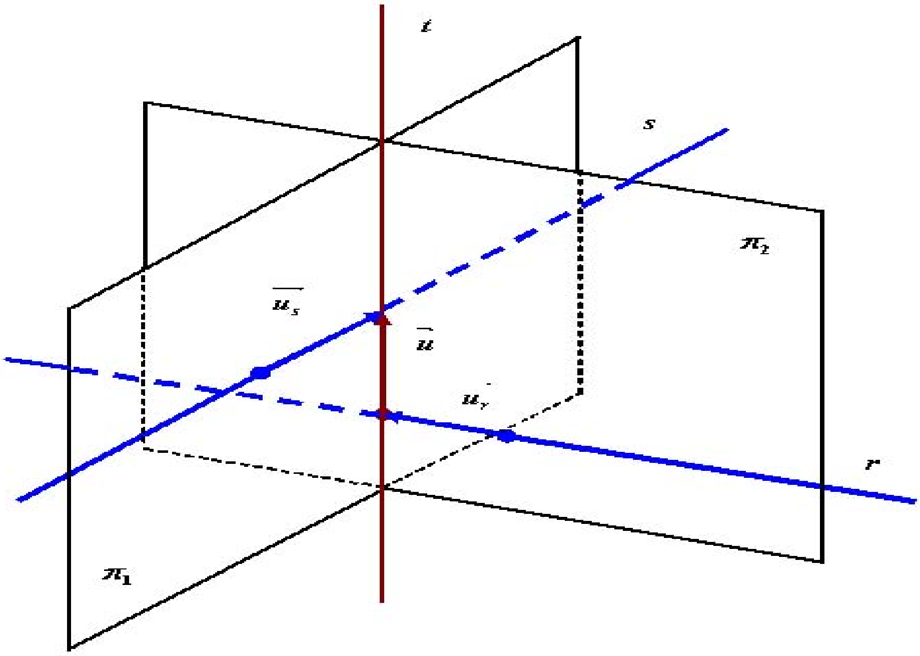
Problema 115 Calcular una recta que sea perpendicular a las siguientes rectas:

$$r : \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 1}{1}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrr} 2x- & y+ & z = 1 \\ x+ & 2y- & z = 2 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right| = -i + 3j + 5k = (-1, 3, 5)$$



Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y + z = 1 \\ 2y - z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 3 \\ z = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow P_s(0, 3, 4)$$

Tenemos, por tanto

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, 3, 5) \\ P_s(0, 3, 4) \end{array} \right.$$

La recta t que buscamos será la intersección de dos planos π_1 y π_2. Para encontrarlos buscamos un vector que sea perpendicular a los dos vectores directores de las rectas dadas, es decir, el producto vectorial de ambos vectores

$$\overrightarrow{u} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{array} \right| = -8i - 11j + 5k = (-8, -11, 5)$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (-8, -11, 5) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 3, 5) \\ P_s(0, 3, 4) \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (-8, -11, 5) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} -8 & -1 & x \\ -11 & 3 & y-3 \\ 5 & 5 & z-4 \end{vmatrix} = -70x - 45y + 13z + 83 = 0$$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & x-1 \\ -11 & -1 & y \\ 5 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = -6x + 2y + 14z + 20 = 0$$

La recta buscada será:

$$h : \left\{ \begin{array}{rrrr} -70x- & 45y+ & 13z+ & 83 = 0 \\ -6x+ & 2y+ & 14z+ & 20 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 116 Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1 : & x- & 2y+ & 3z & -4 = 0 \\ \pi_2 : & 2x+ & y+ & z & +1 = 0 \\ \pi_3 : & -3x+ & y- & 4z & -3 = 0 \end{array}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $|A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

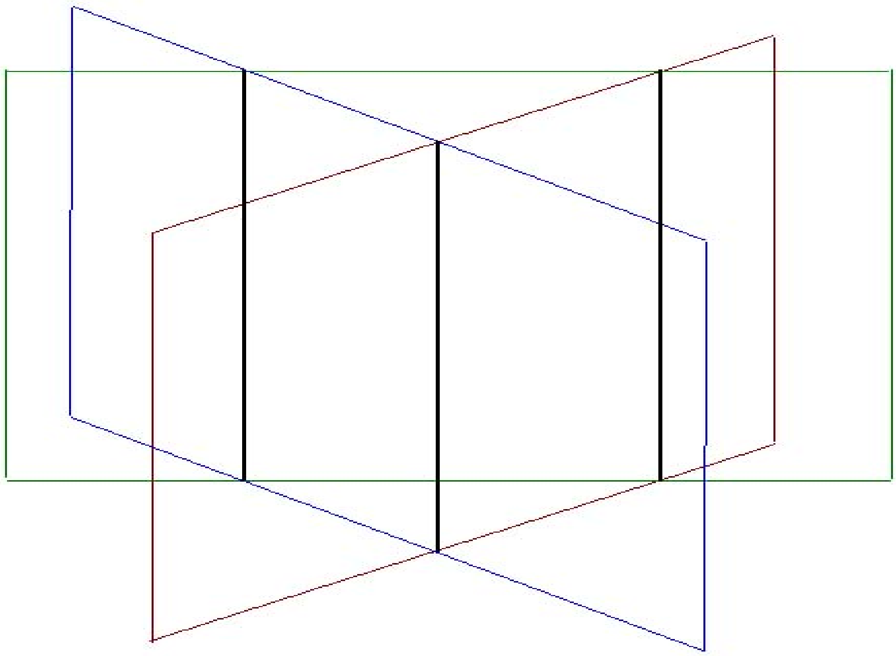
En conclusión $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}\overline{A} = 3$, luego no hay soluciones comunes para los tres plano, y tendremos que compararlos dos a dos:

Comparamos π_1 con π_2: $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-2}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

Comparamos π_1 con π_3: $\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{-2}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

Comparamos π_2 con π_3: $\dfrac{2}{-3} \neq \dfrac{1}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

En conclusión, los planos se cortan dos a dos.



Problema 117 Dadas las rectas

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 2y+ & z = & -1 \end{array} \right.$$

estudiar su posición en el espacio y calcular el ángulo que forman.
Solución:

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right| = -i - 3j - 4k = (-1, -3, -4)$$

Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow P_s(0, 0, -1)$$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,2) \\ P_r(3,2,1) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,-3,-4) \\ P_s(0,0,-1) \end{array} \right.$$

Tomamos el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_rP_s} = (-3,-2,-2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que Rango$A = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3 \Longrightarrow$ Las dos rectas se cruzan.

El ángulo que forman las dos rectas vendrá dado por

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-2-3-8|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+9+16}} = \frac{13}{3\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$$\cos\alpha = 0,8498365855 \Longrightarrow \alpha = 31,80610002^{o}$$

Problema 118 La recta

$$r: \left\{ \begin{array}{rrr} x = & -2+ & 3t \\ y = & 4- & 2t \\ z = & -6+ & 5t \end{array} \right.$$

corta al plano $\pi_1 : x - y - 2z = 1$ en el punto A y al plano $\pi_2 : x + y - z = 0$ en el punto B. Si O es el origen de coordenadas

1. Hallar el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

2. Hallar el área del triángulo OAB

Solución:
Cálculo del punto A:
Sustituimos r en el plano π_1 y nos queda
$(-2+3t)-(4-2t)-2(-6+5t) = 1 \Longrightarrow\ t = 1$ y sustituyendo en r obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x = & -2+ & 3 \\ y = & 4- & 2 \\ z = & -6+ & 5 \end{array} \right. \Longrightarrow A(1,2,-1)$$

Cálculo del punto B:
Sustituimos r en el plano π_2 y nos queda
$(-2+3t)-(4-2t)-(-6+5t) = 0 \Longrightarrow\ t = 2$ y sustituyendo en r obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x = & -2+ & 6 \\ y = & 4- & 4 \\ z = & -6+ & 10 \end{array} \right. \Longrightarrow B(4,0,4)$$

1. Cálculo de $\overrightarrow{OA}$:
$$\overrightarrow{OA} = (1, 2, -1) - (0, 0, 0) = (1, 2, -1)$$
Cálculo de $\overrightarrow{OB}$:
$$\overrightarrow{OB} = (4, 0, 4) - (0, 0, 0) = (4, 0, 4)$$
Si α es el ángulo que forman $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ tendremos
$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|} = \frac{|1\cdot 4 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot 4|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{16+0+16}} = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$$
Los dos vectores son perpendiculares.

2. Área$= \dfrac{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}{2} = \dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{32}}{2} = 4\sqrt{3}$

Problema 119 Calcular una recta que pase por el punto $(1, 0, 1)$ que sea paralela al plano π_1 de ecuación $\pi_1 : x - 2y + z = 1$ y que también sea paralela al plano π_2 que pasa por los puntos de coordenadas $(2, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$ y $(1, -1, 0)$
Solución:
Si r es paralela a π_1 y a π_2 es que es paralela a la intersección de los dos planos.
Calculamos primero el plano π_2:
$$\pi_2 = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, 1) - (2, 0, 1) = (-2, 2, 0) \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (1, -1, 0) - (2, 0, 1) = (-1, -1, -1) \\ A(2, 0, 1) \end{array}\right. \Longrightarrow$$
$$\pi_2 : \left|\begin{array}{rrl} -2 & -1 & x-2 \\ 2 & -1 & y \\ 0 & -1 & z-1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow x + y - 2z = 0$$
La recta s viene definida por la intersección de dos planos
$$s : \left\{\begin{array}{rrrl} x- & 2y+ & z = & 1 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \end{array}\right.$$
Para calcular una recta que sea paralela a s calculamos su vector director.
Vector normal del plano π_1 es $\overrightarrow{v_1} = (1, -2, 1)$
Vector normal del plano π_2 es $\overrightarrow{v_2} = (1, 1, -2)$
El vector director de la recta s será $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ producto vectorial.
$$\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left|\begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right| = 3i + 3j + 3k = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$$

La recta pedida tiene como vector director $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ y pasa por el punto $P(1,0,1)$:

$$s : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1+t \\ y = & t \\ z = & 1+t \end{array} \right. \Longrightarrow \quad x-1 = y = z-1$$

Problema 120 Consideremos un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$, siendo $A(1,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(2,4,1)$ y $E(1,2,7)$. Hallar el área de una de las bases, el volumen del paralelepípedo y la distancia entre sus bases.

Solución:

Igualdades:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$$
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$$

Área de la base= $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}|$
$\overrightarrow{AB} = (2,1,1) - (1,1,1) = (1,0,0)$
$\overrightarrow{BC} = (2,4,1) - (2,1,1) = (0,3,0)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right| = 3k = (0,0,3)$$

Área= $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}| = \sqrt{9} = 3u^2$ El volumen es el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$. Nos falta por calcular $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AE} = (1,2,7) - (1,1,1) = (0,1,6)$

Volumen= $\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{array} \right| = 18u^3$

Ahora sabemos que el volumen es igual al área de la base por la altura del paralelepípedo, luego la altura será igual al cociente entre el volumen y el área de la base, altura= $\dfrac{18}{3} = 6u$

Problema 121 Dadas las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1+t \\ y = & t \\ z = & -t \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{rr} x = & \lambda \\ y = & 2+2\lambda \\ z = & 0 \end{array} \right.$$

1. Estudiar la posición relativa de r y s.
2. Hallar la ecuación de una recta que sea perpendicular, simultánemente a r y a s.

Solución:

1.

$$r := \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \quad s := \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 2, 0) \\ P_r(0, 2, 0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

2. Sea t la perpendicular común, tendremos que el vector director de t es

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i - j + k = (2, -1, 1)$$

Obtenemos r como corte de dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 2, 0) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, 1) \\ P_s(0, 2, 0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y + z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - y - 5z + 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} & y+ & z & & = 0 \\ 2x- & y- & 5z & +2 & = 0 \end{cases}$$

Problema 122 Dados los puntos $A(1,-3,1)$, $B(2,3,1)$ y $C(1,3,-1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano π
3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. El plano π viene determinado, como siempre, por dos vectores y un punto:
$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,6,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,6,-2) \\ A(1,-3,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \pi : -6x + y + 3z + 6 = 0$$
2.
$$d(O,\pi) = \frac{|0\cdot(-6) + 0\cdot 1 + 0\cdot 3 + 6|}{\sqrt{36+1+9}} = \frac{6}{\sqrt{46}}\ u$$
3. El volumen de un tetraedro es $V = \dfrac{1}{3}\cdot b\cdot h$, donde b es el área de la base y h la altura.
$$b = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2} = \left| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{array} \right| \right| = |(-12,2,6)| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b = \sqrt{144+4+36} = 2\sqrt{46}\ u^2$$
$$h = d(O,\pi) = \frac{6}{\sqrt{46}} \Longrightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{46}\cdot\frac{6}{\sqrt{46}} = 4\,u^3$$

Problema 123 Sea el plano $\pi : x - 2y - z + 1 = 0$
Hallar:

1. El punto simétrico P' de $P(1,3,2)$ y el punto simétrico Q' de $Q(4,0,-1)$ respecto de π.
2. La recta simétrica de la recta que une a los puntos P y Q respecto del plano π.

Solución:

1. Para calcular el punto P' simétrico de P calculamos una recta perpendicular al plano π y que pase por P, sea r dicha recta

$$r : \left\{ \begin{array}{ll} x = 1+ & t \\ y = 3- & 2t \\ z = 2- & t \end{array} \right.$$

Para calcular el punto de corte de r y π hacemos
$(1 + t) - 2(3 - 2t) - (2 - t) + 1 = 0 \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow P''(0, 5, 3)$
P'' es el punto medio entre P y P', luego

$$P'' = \frac{P' + P}{2} \Longrightarrow P' = 2P'' - P = 2(0, 5, 3) - (1, 3, 2) = (-1, 7, 4)$$

Para calcular el punto Q' simétrico de Q calculamos una recta perpendicular al plano π y que pase por Q, sea s dicha recta

$$s : \left\{ \begin{array}{lrl} x = & 4+ & t \\ y = & - & 2t \\ z = & -1- & t \end{array} \right.$$

Para calcular el punto de corte de s y π hacemos
$(4 + t) - 2(-2t) - (-1 - t) + 1 = 0 \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow Q''(3, 2, 0)$
Q'' es el punto medio entre Q y Q', luego

$$Q'' = \frac{Q' + Q}{2} \Longrightarrow Q' = 2Q'' - Q = 2(3, 2, 0) - (4, 0, -1) = (2, 4, 1)$$

2. La recta que buscamos une los puntos P' y Q' y pasa por ambos puntos

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P'Q'} = (3, -3, -3) \\ P'(-1, 7, 4) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = & -1 + 3t \\ y = & 7 - 3t \\ z = & 4 - 3t \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 7}{-3} = \frac{z - 4}{-3}$$

Problema 124 1. Determinar el centro y el radio de la circunferencia

$$C : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$

2. Obtener la ecuación de la recta tangente a C en el punto $P(4, 0)$

3. Encontrar la ecuación de la circunferencia concéntrica con C que es tangente a la recta de ecuación $s : 2x - y + 2 = 0$.

Solución:

1. $$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=-4 \\ n=-2b=2 \\ p=a^2+b^2-r^2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-1 \\ r=\sqrt{5} \end{array}\right.$$

   La circunferencia tiene de centro $A(2,-1)$ y radio $r=\sqrt{5}$

2. El vector $\overrightarrow{AP}=(2,1)$,y como la recta tangente es perpendicular a él tendrá como vector director $\overrightarrow{u}=(-1,2)$

   $$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u}=(-1,2) \\ P(4,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4-t \\ y=2t \end{array}\right. \Longrightarrow 2x+y-8=0$$

3. La circunferencia que buscamos tiene el mismo centro $A(2,-1)$ que la dada, lo único que nos queda por calcular es su radio. Como la recta que nos dan es tangente a la circunferencia, la distacia desde el centro a la recta será el radio que buscamos.

   $$d(A,s)=\frac{|2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$$

   La ecuación de la circunferencia será

   $$(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{49}{5} \Longrightarrow 5x^2+5y^2-20x+10y-24=0$$

Problema 125 Se consideran las cónicas C_1 y C_2, cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1: 9x^2+16y^2=144; \quad C_2: 9x^2-16y^2=144$$

1. Identificar C_1 y C_2.Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad y asíntotas (si existen).

2. Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Solución:

1. $C_1: 9x^2+16y^2=144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9}+\frac{y^2}{144/16}=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a=4$ y semieje menor $b=3$.
   Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2+c^2=a^2 \Longrightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.
   Su excentricidad será: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.
   Podemos concluir:

- Focos: $F'(-\sqrt{7},0)$ $F(\sqrt{7},0)$
- Vértices: $(-4,0)$ $(0,3)$ $(0,-3)$ $(4,0)$
- Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$
- Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.

$C_2: 9x^2-16y^2=144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9}-\frac{y^2}{144/16}=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a=4$, y $b=3$, y se encuentra centrada en el origen.
Para calcular los focos $a^2+b^2=c^2 \Longrightarrow c=\sqrt{16+9}=5$
Para calcular la excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$
Las pendientes de las asíntotas serían: $m=\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$ y $m'=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{4}$
Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0,0)$ las rectas buscadas serían:

$$y=\frac{3}{4}x \quad ; \quad y=-\frac{3}{4}x$$

Podemos concluir:

- Focos: $(-5,0)$ $(5,0)$
- Vértices: $(-4,0)$ $(4,0)$
- Excentricidad: $e=\frac{5}{4}$
- Asíntotas:
$$y=\frac{3}{4}x \quad ; \quad y=-\frac{3}{4}x$$

2. La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abcisas y simétrica respecto a este eje es $x=ay^2+by+c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.
Como pasa por el vértice $(-4,0),(0,3),(0,-3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -4= & & & c\\ 0= & 9a+ & 3b+ & c\\ 0= & 9a- & 3b+ & c \end{array}\right. \Longrightarrow c=-4,\ a=\frac{4}{9}\ y\ b=0 \Longrightarrow x=\frac{4}{9}y^2-4$$

Problema 126 1. (1 punto) Calcula el área de un triángulo de vértices $A(1,1,2)$, $B(1,0,-1)$ y $C(1,-3,2)$.

2. (1 punto) Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi: x+y-z+6=0$ con la recta $s: \dfrac{x}{3}=y-2=z+1$ y es paralela a la recta

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+\ y \qquad -4=0\\ 4x-3y+z-1=0 \end{array}\right.$$

Solución:

1.

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, -3); \quad \overrightarrow{AC} = (0, -4, 0)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}| = |(-12, 0, 0)| = 12$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{12}{2} = 6$$

2. Calculamos la intersección de π y la recta s:

$$s : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases} \Longrightarrow 3t+2+t-(-1+t)+6 = 0 \Longrightarrow t = -3 \Longrightarrow P(-9, -1, -4)$$

La recta pedida pasará por este punto y tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u} = (3, 1, 0) \times (4, -3, 1) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -13)$$

La recta pedida es

$$x + 9 = \frac{x + 1}{-3} = \frac{z + 4}{13}$$

Problema 127 1. Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene centro $C(1, 4)$ y es tangente a la recta $s : 3x + 4y - 4 = 0$

2. Determinar el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0,0), (0,2) y (2,4).

Solución:

1.

$$r = d(C, s) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

Luego la ecuación buscada es $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

2. La ecuación general de una circunferencia es $x^2+y^2+mx+ny+p = 0$, y sustituyendo los puntos dados en la ecuación tenemos:

$$\begin{cases} p = 0 \\ 2n + p + 4 = 0 \\ 2m + 4n + p + 20 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = -2a = -6 \\ n = -2b = -2 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ r = \sqrt{10} \end{cases}$$

En conclusión, el centro es $C(3, 1)$, el radio $r = \sqrt{10}$ y la ecuación de la circunferencia pedida será $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

Problema 128 1. Calcular la distancia del punto de coordenadas $(1, 1, 2)$ al plano que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

2. Calcular la distancia del punto de coordenadas $P(3, 5, 0)$ a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(0, 1, 2)$ y $B(0, 1, 1)$.

Solución:

1. Vamos a calcular el plano que pasa por los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, 1)$. Para ello obtenemos los vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) - (1, 1, 0) = (0, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 1)$$

El plano vendrá definido por

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{v} = (-1, 0, 1) \\ A(1, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi : \left| \begin{array}{rrl} 0 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x + y + z - 2 = 0$$

Ahora calculamos la distancia del punto $P(1, 1, 2)$ al plano π:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_o + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 + 1 + 2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2. Primero calculamos el vector director de la recta que pasa por los puntos $A(0, 1, 2)$ y $B(0, 1, 1)$, para ello calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) - (0, 1, 2) = (0, 0, -1)$, y un vector auxiliar $\overrightarrow{AP} = (3, 5, 0) - (0, 1, 2) = (3, 4, -2)$. Ahora calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \left| \begin{array}{ccr} i & j & k \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{array} \right| = 4i - 3j = (4, -3, 0)$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{16 + 9}}{\sqrt{1}} = 5$$

Problema 129 Compruebe que las rectas

$$r : (x, y, z) = (3, -4, 0) + t(2, -3, -2)$$

$$s : (x, y, z) = (-7, 1, 2) + h(4, -1, 0)$$

se cortan en un punto. Halle también la ecuación general del plano que determinan.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, -3, -2) \\ P_r = (3, -4, 0) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (4, -1, 0) \\ P_s = (-7, 1, 2) \end{array} \right.$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (-7, 1, 2) - (3, -4, 0) = (-10, 5, 2)$ y tendremos:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

Ahora tenemos que

$$\left| \begin{array}{rr} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{array} \right| = -13 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = 0 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ las dos rectas se cortan.

El plano que determinan estas dos rectas será:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, -3, -2) \\ \overrightarrow{u_s} = (4, -1, 0) \\ P_r = (3, -4, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{rrl} 2 & 4 & x - 3 \\ -3 & -1 & y + 4 \\ -2 & 0 & z \end{array} \right| = x + 4y - 5z + 13 = 0$$

Problema 130 Dados el plano $\pi : x + y + z = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

1. Hallar la ecuación de una recta s que sea perpendicular a r y pase por P.

2. Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.

3. Hallar el punto P'',simétrico de P respecto de π.

Solución:

1. Hallamos primero la ecuación del plano π' perpendicular a la recta r y que pase por P. Este plano tendrá como vector normal al vector director de la recta $u_r = (0, 1, 1)$.

   La ecuación general de este plano será $y + z + K = 0$, para calcular K particularizamos que este plano contiene al punto $P(1, 1, 0)$, y por simple sustitución tenemos que

$1+0+k=0 \Longrightarrow k=-1 \Longrightarrow \pi' : y+z-1=0$

Ahora tenemos que encontrar el punto de corte de este plano y la recta r, para ello creo que lo más fácil es con la ecuación de la recta en forma paramétrica

$$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=t \\ z=t \end{array}\right.$$

Sustituyendo en el plano tendremos $t+t-1=0 \Longrightarrow t=\dfrac{1}{2}$ el punto que buscamos será por tanto $Q\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

La recta que queremos obtener pasa por P y por Q:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{QP}=(1,1,0)-\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)=\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \\ P(1,1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1+\dfrac{1}{2}\lambda \\ z=\dfrac{1}{2}\lambda \end{array}\right.$$

2. El punto Q que hemos obtenido será el punto medio entre P y P', y por tanto

$$Q=\frac{P+P'}{2} \Longrightarrow P'=2Q-P=2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)-(1,1,0)=(1,0,1)$$

3. Ahora la recta que une los puntos P y P'' es perpendicular al plano π, y por tanto el vector director de esta recta es el vector normal del plano, llamando t a esta recta podemos ponerlo de la siguiente manera $\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_t}=(1,1,1)$

$$t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(1,1,1) \\ P(1,1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\mu \\ y=1+\mu \\ z=\mu \end{array}\right.$$

Buscamos el punto de corte de esta recta con el plano π, por simple sustitución

$$1+\mu+1+\mu+\mu=1 \Longrightarrow \mu=-\frac{1}{3}$$

Obtenemos el punto de corte $H\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

$$H=\frac{P+P''}{2} \Longrightarrow P''=2H-P=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Problema 131 *(3 puntos)* Dadas las rectas en el espacio:

$$r: \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$$

$$s: \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

1. Hallar la distancia entre las dos rectas.
2. Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.

Solución:

1.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(3,-2,1)\\ P_r(2,1,0)\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,-1,2)\\ P_s(-1,-2,1)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{array}\right|=-3i-4j+k=(-3,-4,1)$$

$$|\overrightarrow{u}|=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,-2,1)-(2,1,0)=(-3,-3,1)$$

$$\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=\left|\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & -3 & 1\end{array}\right|=22$$

Luego la distancia entre las dos rectas será:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{22}{\sqrt{26}}$$

2.

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(3,-2,1)\\ \overrightarrow{u}=(-3,-4,1)\\ P_r(2,1,0)\end{array}\right. \qquad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,-1,2)\\ \overrightarrow{u}=(-3,-4,1)\\ P_s(-1,-2,1)\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\left|\begin{array}{ccc} 3 & -3 & x-2\\ -2 & -4 & y-1\\ 1 & 1 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow x-3y-9z+1=0$$

$$\pi_2:\left|\begin{array}{ccc} 2 & -3 & x+1\\ -1 & -4 & y+2\\ 2 & 1 & z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow 7x-8y-11z+2=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y-9z+1=0\\ 7x-8y-11z+2=0\end{array}\right.$$

Problema 132 Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

1. (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

2. (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.

Solución:

1. Datos:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1,3,-1) \quad r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (6,2,1) \\ P_r(-2,1,0) \end{cases}$$

$$\pi' : \begin{vmatrix} 1 & 6 & x+2 \\ 3 & 2 & y-1 \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' : 5x - 7y - 16z + 17 = 0$$

2.

$$s : \begin{cases} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 5x - 7y - 16z + 17 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 + z \\ 5x - 7y = -17 + 16z \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2 + \dfrac{5}{2} \cdot \lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot \lambda \\ \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 133 Discutir la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro a.

$$\begin{cases} \pi_1 : & x- & y+ & z = & 0 \\ \pi_2 : & & ay+ & 2z = & 4 \\ \pi_3 : & & 2y+ & az = & 4 \end{cases}$$

Solución

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 4 \\ 0 & 2 & a & 4 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \Longrightarrow |A| = a^2 - 4 = 0 \Longrightarrow a = 2,\ \ a = -2$.

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ tendremos que $|A| \neq 0$ por lo que Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = 3 =nº de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $a = 2$ tendremos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Vemos que tiene dos filas iguales, y además $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{array}\right| = 2 \neq 0$. Por lo que podemos concluir en este caso que Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2$ <nº incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado. Los planos π_2 y π_3 son coincidentes, y el plano π_1 los corta en una recta.

Si $a = -2$ tendremos:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Primero tenemos que $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{array}\right| = -2 \neq 0$, por lo que Rango$(A) = 2$.

Como

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{array}\right| = 16 \neq 0$$

tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3$

En este caso, por tanto, Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$. El sistema es Incompatible y para ver la posición de los planos los comparamos dos a dos. Vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos, y el plano π_1 los corta a los dos.

Problema 134 Sea la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & & + & z = 1 \\ x & +y- & & z = 0 \end{array} \right.$$

1. Calcular la ecuación de un plano que sea perpendicular a ella y contenga al punto $P(1,1,0)$.

2. Calcular la intersección de este plano y r.

3. Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

Solución:

1.

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,3,2)$$

$$\pi : -x + 3y + 2z + \lambda = 0$$

Como este plano tiene que contener al punto P, por simple sustitución tenemos: $-1 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$.

$$\pi : -x + 3y + 2z - 2 = 0 \Longrightarrow x - 3y - 2z + 2 = 0$$

2. Pongo r en paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

y sustituyo en π, $\lambda - 3(1-3\lambda) - 2(1-2\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{3}{14}$

Sustituyendo este valor en r tenemos el punto $P'\left(\dfrac{3}{14}, \dfrac{5}{14}, \dfrac{8}{14}\right)$

3.

$$P' = \frac{P'' + P}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{14} = \dfrac{x+1}{2} \Longrightarrow x = -\dfrac{4}{7} \\ \\ \dfrac{5}{14} = \dfrac{y+1}{2} \Longrightarrow y = -\dfrac{2}{7} \\ \\ \dfrac{8}{14} = \dfrac{z}{2} \Longrightarrow z = \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

El punto buscado es $P''\left(-\dfrac{4}{7}, -\dfrac{2}{7}, \dfrac{4}{7}\right)$.

Problema 135 Determinar la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r: \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & & + \ z & = 1 \\ x & +y- & z & = 0 \end{array} \right. \quad , \quad s: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$$

Solución:
El vector director de la recta r será:

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = (-1, 3, 2)$$

Un punto de la recta será (haciendo $x = 0$) $A_r(0, 1, 1)$, y tendremos:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 2) \\ A_r(0, 1, 1) \end{array} \right. \quad , \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, -1) \\ A_s(1, 1, 0) \end{array} \right.$$

Calculamos el vector auxiliar $\overrightarrow{A_rA_s} = (1, 0, -1)$

$$|A| = |\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{A_rA_s}| = \left| \begin{array}{rrr} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right| = 5 \neq 0$$

Luego las dos rectas se cruzan.

Problema 136 Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{array} \right. \qquad \pi: \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{array} \right.$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1: x - y + z - 2 = 0$$

Problema 137 Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

1. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

2. Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

1. Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1,1,1)$.
Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (-1,1,1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ $z_0 = 2$, el punto será $D(0,2,2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-2,2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1,1,1)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 138 Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & x- & 2y+ & 3z & -4 = 0 \\ \pi_2: & 2x+ & y+ & z & +1 = 0 \\ \pi_3: & -2x+ & 4y- & 6z & = 0 \end{array}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & 3z & -4=0\\ 2x+ & y+ & z & +1=0\\ -2x+ & 4y- & 6z & =0 \end{array}\right.$$

Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 3 & -4\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el determinante de A.

$$|A|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right|=0$$

Pero podemos encontrar el menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & -2\\ 2 & 1 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}A = 2$

Calculamos ahora el rango de $\overline{A}$, calculamos el determinante
$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right| = -40 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3.$

En conclusión $\text{Rango}A = 2 \neq \text{Rango}\overline{A} = 3$ y tendremos que compararlos dos a dos; comparamos π_1 y π_3:

$$\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}=\frac{3}{-6}\neq\frac{-4}{0}$$

Esto quiere decir que π_1 y π_3 son paralelos, y por tanto, π_2 corta a los dos.

Problema 139 Dadas las rectas

$$r:\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$$

$$s:\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1\\ 2x- & 2y+ & z= & -1 \end{array}\right.$$

estudiar su posición en el espacio y calcular el ángulo que forman.

Solución:

$$\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right| = -i-3j-4k=(-1,-3,-4)$$

Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow P_s(0, 0, -1)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \\ P_r(3, 2, 1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -3, -4) \\ P_s(0, 0, -1) \end{array} \right.$$

Tomamos el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_rP_s} = (-3, -2, -2)$

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Tenemos que Rango$A = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3 \Longrightarrow$ Las dos rectas se cruzan.

El ángulo que forman las dos rectas vendrá dado por

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-2-3-8|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+9+16}} = \frac{13}{3\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$$\cos \alpha = 0,8498365855 \Longrightarrow \alpha = 31,80610002^{\text{o}}$$

Problema 140 Discute la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro m.

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} \pi_1 : & x- & y & = & 1 \\ \pi_2 : & 2x+ & 3y & -5z = & -16 \\ \pi_3 : & x+ & my & -z = & 0 \end{array} \right.$$

Solución

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \Longrightarrow |A| = 5m = 0 \Longrightarrow m = 0$.

Si $m \neq 0$ tendremos que $|A| = 0$ por lo que Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3$ =n$^{\text{o}}$ de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $m = 0$ tendremos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Si calculamos
$$\left|\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 1\\ 3 & -5 & -16\\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right| = 13 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Además vemos que $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1\\ 2 & 3 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$. Por lo que podemos concluir en este caso que Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema es Incompatible.

Comparamos los planos dos a dos y tenemos:

π_1 y π_2 se cortan.
π_1 y π_3 se cortan.
π_2 y π_3 se cortan.
Se cortan los tres planos dos a dos.

Problema 141 Dadas las rectas
$$r : \left\{\begin{array}{rrrr} x- & y & +2z = & 1\\ 2x+ & y & = & -1 \end{array}\right.$$
$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Calcular:

1. La posición relativa de ambas.
2. Un plano π que contenga a r y sea paralelo a s.

Solución:
$$\overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right| = -2i + 4j + 3k = (-2, 4, 3)$$

Para encontrar un punto de la recta r hacemos:
$$x = 0 \Longrightarrow y = -1,\ z = 0 \Longrightarrow P_r(0, -1, 0)$$
$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 4, 3)\\ P_r(0, -1, 0) \end{array}\right. \qquad s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1)\\ P_s(1, -1, 1) \end{array}\right.$$

1. Tomamos el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_rP_s} = (1, 0, 1)$
$$A = \left(\begin{array}{rrr} -2 & 4 & 3\\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} -2 & 4 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que Rango$A = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3 \Longrightarrow$ Las dos rectas se cruzan.

2.

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,4,3)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,1,-1)\\ P_r(0,-1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}-2 & 2 & x\\ 4 & 1 & y+1\\ 5 & -1 & z\end{array}\right| = 9x-8y+10z-8=0$$

Problema 142 Dada la recta $r: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ y el plano $\pi: 3x+y-z-1=0$. Se pide:

1. Comprobar que posición ocupa esta recta respecto a este plano.
2. En caso de corte, calcular el ángulo que ocupan.
3. Calcular la proyección ortogonal de esta recta sobre el plano.

Solución:

1. Ponemos la ecuación de la recta como intersección de dos plano:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}\Longrightarrow x+y-1=0$$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{z-1}{2}\Longrightarrow 2x+z-3=0$$

$$r:\left\{\begin{array}{lllll}x+ & y & & -1=0\\ 2x+ & & +z & -3=0\end{array}\right. \quad \pi: 3x+y-z-1=0$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)$$

Como $|A|=4\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=$Rango$(\overline{A})=3\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, es decir, se cortan en un punto.

2.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,2)\\ P_r(1,0,1)\end{array}\right. \quad \pi:\overrightarrow{u_\pi}=(3,1,-1)$$

$$\sin\alpha=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}=\frac{-4}{\sqrt{66}}\Longrightarrow \alpha=-29.49620849^{o}$$

3. Se obtiene como intersección de dos planos, el plano dado π y el plano definido por:

$$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,2)\\ \overrightarrow{u_\pi}=(3,1,-1)\\ P_r(1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc}-1 & 3 & x-1\\ 1 & 1 & y\\ 2 & -1 & z-1\end{array}\right| = 3x-5y+4z-7=0$$

La proyección ortogonal será:

$$s:\left\{\begin{array}{llll}3x- & 5y+ & 4z- & 7=0\\ 3x+ & y- & z- & 7=0\end{array}\right.$$

Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ A(1,-1,0) \end{array} \right. \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1) \\ A(1,-1,0) \end{array} \right.$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\left| \begin{array}{rrc} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 143 Encontrar la recta que pasa por el punto $P(1,0,-1)$ y corta a las rectas r y s de ecuaciones

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y- & z+ & 1 = 0 \\ 2x- & y+ & z+ & 4 = 0 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{lr} x = & 3+t \\ y = & t \\ z = & 1+t \end{array} \right.$$

Determinar la posición que ocupan las dos rectas.

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-5,-7) \\ P_r(0,-5,-9) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,1,1) \\ P_s(3,0,1) \end{array} \right.$$

Donde hemos calculado

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right| = (1,-5,-7)$$

Si hacemos $x = 0$ obtenemos $P_r(0,-5,-9)$.

Para determinar la posición que ocupan necesitamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s} = (3,5,10)$ y tenemos que

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 10 \end{array} \right), \quad A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |\overline{A}| = 54 \neq 0$$

Tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Ahora tenemos que calcular:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -5, -7) \\ \overrightarrow{PP_r} = (0, -5, -9) \\ P(1, 0, 1) \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{PP_s} = (2, 0, 2) \\ P(1, 0, 1) \end{array} \right.$$

Obtenemos:

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & x-1 \\ -5 & -5 & y \\ -7 & -8 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x + 3y - 2z - 3 = 0$$

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - z - 2 = 0$$

La recta que buscamos será

$$t : \left\{ \begin{array}{rrrr} x & +3y- & 2z- & 3 = 0 \\ x & - & z- & 2 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 144 Encontrar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P(1, 2, 1)$ y $Q(1, 2, 3)$, y al punto intersección de la recta r y el plano π cuyas ecuaciones son:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{array} \right. \qquad \pi : x + y + z = 0$$

Solución: El punto de intersección que buscamos será:

$$(1 + 2t) + (2 + 2t) + (1 - 2t) = 0 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow S(-3, -2, 5)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3) - (1, 2, 1) = (0, 0, 2) \\ \overrightarrow{PS} = (-3, -2, 5)_{(}1, 2, 1) = (-4, -4, 2) \\ P(1, 2, 1) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} 0 & -4 & x-1 \\ 0 & -4 & y-2 \\ 2 & 4 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - y + 1 = 0$$

Problema 145 Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π de ecuaciones

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrr} 2x- & y+ & & +2 = 0 \\ x+ & y+ & z & -1 = 0 \end{array} \right. \qquad \pi : x + y - z + 1 = 0$$

y calcular la proyección ortogonal de r sobre π.
Solución: Sean las matrices A y $\overline{A}$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=-6\neq 0\Longrightarrow$$

Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3\Longrightarrow$ la recta r y el plano π se cortan.

La proyección ortogonal de r sobre π será la recta t, que vendrá determinada por la recta intersección del plano π y otro plano π' perpendicular a él que contenga a la recta r, esto es

$$\pi':\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(1,1,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(-1,-2,3)\\ P_r(0,2,-1) \end{array}\right.$$

Donde

$$\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right|=(-1,-2,3)$$

Si $x=0$ obtenemos que $P_r(0,2,-1)$. Por tanto:

$$\pi':\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & x\\ 1 & -2 & y-2\\ -1 & 3 & z+1 \end{array}\right|=0\Longrightarrow x-2y-z+3=0$$

La recta t que buscamos tendrá de ecuación:

$$t:\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y- & z+ & 3=0\\ x+ & y- & z+ & 1=0 \end{array}\right.$$

Problema 146 *(3 puntos)* Se considera r cuyas ecuaciones paramétricas son: $r:\left\{\begin{array}{l} x=2t\\ y=t\\ z=0 \end{array}\right.$ y el plano $\pi: x+y+z-1=0$.

1. Determinar las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta y cuya distancia al plano π sea igual que su distancia al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto?. Contestar razonadamente.

2. Calcular la distancia de $Q(1,1,1)$ a r y a π.

Solución:

1. Un punto cualquiera de r es dela forma $P(2t, t, 0)$, tendremos

$$d(P, \pi) = \frac{|2t + t - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|3t - 1|}{\sqrt{3}}$$

$$d(P, O) = \sqrt{(2t)^2 + t^2} = t\sqrt{5}$$

Como estas dos distancias son iguales, $d(P, \pi) = d(P, O)$ tendremos:

$$\frac{|3t - 1|}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5}$$

Como tenemos un valor absoluto, esta ecuación tiene dos soluciones:

$$\frac{3t - 1}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5} \Longrightarrow t = \frac{1}{3 - \sqrt{15}}$$

$$\frac{3t - 1}{\sqrt{3}} = -t\sqrt{5} \Longrightarrow t = \frac{1}{3 + \sqrt{15}}$$

Sustituyendo en P tenemos los puntos

$$\left(\frac{2}{3 - \sqrt{15}}, \frac{1}{3 - \sqrt{15}}, 0\right) \quad \left(\frac{2}{3 + \sqrt{15}}, \frac{1}{3 + \sqrt{15}}, 0\right)$$

2. Tenemos

$$d(Q, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 + 1 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Para calcular calcular $d(Q, r)$ consideramos los datos de la recta r : $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 0) \\ P_r(0, 0, 0) \end{array}\right.$ construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rQ} = (1, 1, 1)$ y calculamos

$$\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right| = (-1, 2, -1)$$

Tenemos por tanto

$$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Problema 147 Se consideran las rectas r_1 y r_2 dadas por

$$r_1 : \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & 2z = 0 \\ 2x- & 3y+ & z = 1 \end{array}\right. \quad r_2 : \left\{\begin{array}{rrr} x = & & 3t \\ y = & 1- & 2t \\ z = & 2+ & t \end{array}\right.$$

Encontrar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto de intersección de r_2 con el plano $\pi : x - 3y - 2z + 7 = 0$

Solución:
El punto de intersección que buscamos será:

$$3t - 3(1 - 2t) - 2(2 + t) + 7 = 0 \Longrightarrow t = 0 \Longrightarrow Q(0, 1, 2)$$

Los datos de r_1 serán los siguientes

$$\overrightarrow{u_{r_1}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -5, -5)$$

Si hacemos $x = 0$ obtenemos el punto $P_{r_1}\left(0, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (-5, -5, -5) \\ \overrightarrow{QP_{r_1}} = \left(0, -\frac{7}{5}, -\frac{11}{5}\right) \\ Q(0, 1, 2) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} -5 & 0 & x \\ -5 & -\dfrac{7}{5} & y - 1 \\ -5 & -\dfrac{11}{5} & z - 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x - 11y + 7z - 3 = 0$$

Problema 148 Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \alpha + t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad s : \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{\alpha} = \frac{z - 1}{-1}$$

1. Estudiar su posición relativa en función de α.
2. Si $\alpha = -1$, encontrar un plano paralelo a r y que contenga a s.

Solución:

1. Los datos que tenemos de r y s son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, \alpha, 2) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, \alpha, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

Construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_sP_r} = (0, \alpha, 1)$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\overline{A}| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan independientemente del valor de α.

2. Cuando $\alpha = -1$ tenemos

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, 2) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{array} \right.$$

El plano π que buscamos vendrá definido por

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, -1, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left| \begin{array}{rrc} -1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ 1 & -1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow y - z + 1 = 0$$

Problema 149 Dadas las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{lrr} x = & 2- & 3t \\ y = & & t \\ z = & 1- & t \end{array} \right. , \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

Calcular:

1. su posición relativa y la distancia que las separa.

2. la recta que es perpendicular a ambas.

Solución:

1.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 1, -1) \\ P_r(2, 0, 1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{array} \right.$$

Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_sP_r} = (1, -2, 1)$, y tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow |\overline{A}| = -2 \neq 0$$

En conclusión Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$ Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_sP_r}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$

$$|[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}| = |-2| = 2$$

Calculamos $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2j + 2k = (0, 2, 2) \Longrightarrow |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = 2\sqrt{2}$$

Tenemos, por tanto

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Obtenemos t, la recta perpendicular a r y a s, como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (0, 2, 2)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-3, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (0, 2, 2) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & x-2 \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x+3y-3z-1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_t} = (0, 2, 2) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y-2 \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x+y-z-4 = 0$$

$$t : \begin{cases} 2x+ & 3y- & 3z- & 1 = 0 \\ 2x+ & y- & z- & 4 = 0 \end{cases}$$

Problema 150 Determine los puntos de la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ que equidistan de los planos $\pi_1 : 3x + 4y = 1$ y $\pi_2 : 4x - 3z = 1$.

Solución:
Un punto genérico de la recta sería $P(1 + 2t, -1 + 3t, -2 + 2t)$

$$d(P, \pi_1) = \frac{|3(1 + 2t) + 4(-1 + 3t) - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-2 + 18t|}{5}$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|4(1 + 2t) - 3(-2 + 2t) - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|9 + 2t|}{5}$$

$$d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} -2+18t=9+2t\Longrightarrow t=\dfrac{11}{16}\\ \\ -2+18t=-(9+2t)\Longrightarrow t=-\dfrac{7}{20}\end{array}\right.$$

Tendríamos dos puntos:

$$P_1\left(\frac{19}{8},\frac{17}{6},-\frac{5}{8}\right),\quad P_2\left(\frac{3}{10},-\frac{41}{20},-\frac{27}{10}\right)$$

Problema 151 Dados los puntos $A(2,3,-1)$, $B(3,3,2)$ y $C(1,4,3)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Calcular la distancia de este plano al origen de coordenadas.
3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. Determinamos

$$\overrightarrow{AB}=(1,0,3),\ \ \overrightarrow{AC}=(-1,1,4)$$

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,0,3)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,1,4)\\ A(2,3,-1)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi:\left|\begin{array}{rrr}1&-1&x-2\\0&1&y-3\\3&4&z+1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$\pi:3x+7y-z-28=0$$

2.

$$d(O,\pi)=\frac{|-28|}{\sqrt{9+49+1}}=\frac{28\sqrt{59}}{59}=3,645289507\,u$$

3.

$$V=\frac{1}{3}(\text{área base})\cdot\text{altura}=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]|$$

$$\overrightarrow{OA}=(2,3,-1),\ \ \overrightarrow{OB}=(3,3,2),\ \ \overrightarrow{OC}=(1,4,3)$$

$$V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{rrr}2&3&-1\\3&3&2\\1&4&3\end{array}\right||=\frac{1}{6}|-28|=\frac{14}{3}=4,666\,u^3$$

Problema 152 Se considera la recta

$$r:\left\{\begin{array}{rrrr}3x+&2y&-z-&1=0\\ x+&y&-&1=0\end{array}\right.$$

Se pide:

1. Determinar la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por $(0,2,2)$, y las coordenadas del punto P intersección de r y s.

2. Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y s, y la de la recta t perpendicular a π por el punto P.

3. Si Q es un punto cualquiera de t, sin hacer ningún cálculo, que relación hay entre las distancias de Q a r, de Q a s y de Q a π.

Solución:

1. Para calcular $\overrightarrow{u_r}$ tenemos:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$

Haciendo $x=0$ obtenemos $P_r(0,1,1)$ y tendremos

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r(0,1,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = & \lambda \\ y = & 1-\lambda \\ z = & 1+\lambda \end{cases}$$

Un plano perpendicular a r sería $\pi' : x-y+z+\lambda=0$ que por contener al punto $(0,2,2) \Longrightarrow -2+2+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=0 \Longrightarrow \pi' : x-y+z=0$

Buscamos el punto de intersección entre el plano π' y la recta r. Sustituimos r en π'

$$\lambda-(1-\lambda)+(1+\lambda)=0 \Longrightarrow \lambda=0 \Longrightarrow P(0,1,1)$$

La recta s pasa por $P(0,1,1)$ y por $P_s(0,2,2)$:

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (0,1,1) \\ P(0,1,1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 & +\lambda \\ z = 1 & +\lambda \end{cases}$$

2. Tenemos que π tiene que contener a r y s, y tenemos que

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r(0,1,1) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (0,1,1) \\ P_s(0,1,1) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x+y-z=0$$

La recta t es perpendicular π y pasa por el punto $P = P_r = P_s$, luego

$$t: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1) \\ P_t(0,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow t = \left\{ \begin{array}{rrr} x = & & 2\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & \lambda \end{array} \right.$$

3. La recta t es perpendicular a r, a s y a π, además los tres se cortan en el punto P, luego si Q es un punto cualquiera de t, tendremos

$$d(Q,r) = d(Q,s) = d(Q,\pi)$$

Problema 153 Sea la ecuación de la recta r determinada por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(1,-1,-1)$; y sea la recta $s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$.

Se pide:

1. Averiguar su posición relativa.
2. La distancia que las separa.
3. Perpendicular común a ambas rectas.
4. Hallar, si existe, una recta que pase por el punto $C(1,2,4)$ y que corte a r y a s.

Solución:

1. $$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u_r} = (0,-1,0) \\ P_r(1,0,-1) \end{array} \right. \quad , \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,5,3) \\ P_s(3,0,0) \end{array} \right.$$

   Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s} = (2,0,1)$, y tenemos

   $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow |\overline{A}| = -4 \neq 0$$

   En conclusión $\text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

2. Calculamos $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|$

   $$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \right| = -3i + 2k = (-3,0,2) \Longrightarrow |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \sqrt{13}$$

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = |-4| = 4$$

Tenemos, por tanto

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

3. Obtenemos t, la recta perpendicular a r y a s, como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s} = (-3,0,2)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0,-1,0) \\ \overrightarrow{u_t} = (-3,0,2) \\ P_r(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y \\ 2 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x-3z-1=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,5,3) \\ \overrightarrow{u_t} = (-3,0,2) \\ P_s(3,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 2 & x-3 \\ 0 & 5 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 10x-13y+15z-30=0$$

$$t : \begin{cases} 2x \quad - \quad 3z- \quad 1=0 \\ 10x \quad -13y+ \quad 15z- \quad 30=0 \end{cases}$$

4. Obtenemos h, la recta que corta a r y a s y pasa por $C(1,2,4)$, como intersección de dos planos.

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0,-1,0) \\ \overrightarrow{P_rC} = (0,2,5) \\ P_r(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 5 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x-1=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,5,3) \\ \overrightarrow{P_sC} = (-2,2,4) \\ P_s(3,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & x-3 \\ 5 & 2 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x-y+z-3=0$$

$$t : \begin{cases} x-1=0 \\ x-y+z-3=0 \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = & 1 & \\ y = & -2 & +\lambda \\ z = & & \lambda \end{cases}$$

Problema 154 Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(2,1,3)$ y $C(-1,2,-1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.

2. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y el origen de coordenadas O.

3. Calcular la altura del tetraedro que va desde el origen de coordenadas a la cara de vértices ABC.

4. Calcular la altura del triángulo OAB, la que va desde el vétice O al segmento $\overline{AB}$.

Solución:

1. Determinamos

$$\overrightarrow{AB} = (0,0,2), \ \ \overrightarrow{AC} = (-3,1,-2)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,0,2) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,1,-2) \\ A(2,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 0 & -3 & x-2 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 2 & -2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x + 3y - 5 = 0$$

2.

$$V = \frac{1}{3}(\text{área base}) \cdot \text{altura} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$$

$$\overrightarrow{OA} = (2,1,1), \ \ \overrightarrow{OB} = (2,1,3), \ \ \overrightarrow{OC} = (-1,2,-1)$$

$$V = \frac{1}{6}|\left| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right|| = \frac{1}{6}|-10| = \frac{5}{3} = 1,666\, u^3$$

3. Área de la base$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{array} \right| = (-2,-6,0) \Longrightarrow \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{10}$$

$$V = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \cdot h \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1,58113883\, u$$

$$d(O,\pi) = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1,58113883\, u$$

4. LLamo r a la recta que une AB:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (0,0,2) \\ P_r = A(2,1,1) \end{cases}$$

Obtenemos el vector auxiliar $\overrightarrow{OA} = (2,1,1)$ y hacemos

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,4,0)$$

$$d(O,r) = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}\, u$$

Problema 155 Consideramos el punto $P(5,-2,9)$ y la recta $r : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{6}$.

Calcular:

1. Distancia de P a r.
2. Ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y que pasa por P
3. Calcular el punto de corte T entre las rectas r y s.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2,-3,6) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_rP} = (4,-1,9)$$

$$\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = (-21,14,42)$$

$$|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}| = \sqrt{(-21)^2 + 14^2 + 42^2} = 49, \quad |\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{4+9+36} = 7$$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{49}{7} = 7$$

2. Ponemos la recta r en paramétricas $\begin{cases} x = & 1- & 2t \\ y = & -1- & 3t \\ z = & & 6t \end{cases}$.

   Luego el punto T de s y de r será en forma genérica $T(1-2t, -1-3t, 6t)$.

El vector $\overrightarrow{PT} = (-4-2t, 1-3t, -9+6t)$ es perpendicular $\overrightarrow{u_r}$ y, por tanto, el producto escalar de ambos será cero

$$\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{u_s} = (6, 2, 3)$$

La recta que buscamos es

$$s : \frac{x-5}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-9}{3}$$

3. Por el apartado anterior tenemos $T(-1, -4, 6)$

Problema 156 Sabemos que las siguientes rectas se cortan en un punto. Hallar el valor de k y la ecuación en forma general del plano que determinan.

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+k}{3} = \frac{z-1}{-2}$$

$$s : \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-k}{3}$$

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, -2) \\ P_r(-1, -k, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 2, 3) \\ P_s(0, -3, k) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (1, -3+k, k-1)$$

Tenemos

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & +k \end{pmatrix} \Longrightarrow |\overline{A}| = -7k + 36 = 0 \Longrightarrow k = \frac{36}{7}$$

Si $k \neq \frac{36}{7} \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2$, y en este caso las rectas se cruzan.

Si $k = \frac{36}{7} \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 2 = \text{Rango}(A)$, y en este caso las rectas se cortan.

En este último caso, el plano que las contiene será:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 3, -2) \\ P_s(0, -3, 36/7) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y+3 \\ 3 & -2 & z-36/7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi : 91x - 56y + z + 204 = 0$$

Problema 157 Sea el plano $\pi : x - 2y + 4z = 12$ y el punto $P(2, -1, 1)$.

1. Calcular la distancia $d(P, \pi)$.

2. Hallar la ecuación de un plano paralelo a π y distinto del mismo, que también diste de P la misma distancia d.

3. Calcular el volumen de la figura limitada por el plano π y los tres planos coordenados.

Solución

1.
$$d(P,\pi)=\frac{2-2(-1)+4\cdot 1-12}{\sqrt{1+4+16}}=\frac{4}{\sqrt{21}}$$

2.
$$\pi' : x-2y+4z+\lambda=0$$
$$d(P,\pi')=\frac{|2+2+4+\lambda|}{\sqrt{21}}=\frac{|8+\lambda|}{\sqrt{21}}=\frac{4}{\sqrt{21}}\Longrightarrow |8+\lambda|=4$$
$$8+\lambda=4\Longrightarrow \lambda=-4\Longrightarrow \pi' : x-2y+4z-4=0$$
Cuando tomamos $8+\lambda=-4\Longrightarrow\lambda=-12$ que es el plano π.

3. Corte del plano π con el eje OX:
Hacemos $y=0$ y $z=0$, obtenemos el punto $A(12,0,0)$.

Corte del plano π con el eje OY:
Hacemos $x=0$ y $z=0$, obtenemos el punto $B(0,-6,0)$.

Corte del plano π con el eje OZ:
Hacemos $x=0$ y $y=0$, obtenemos el punto $C(0,0,3)$.
$$\overrightarrow{OA}=(12,0,0),\ \ \overrightarrow{OB}=(0,-6,0),\ \ \overrightarrow{OC}=(0,0,3)$$
$$[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]=\begin{vmatrix} 12 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=-216$$
$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]|=\frac{216}{6}=36\,u^2$$

Problema 158 Dadas las rectas
$$r:\left\{\begin{array}{rrr} x= & 1- & t\\ y= & & t\\ z= & - & t\end{array}\right. ,\quad s:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$$

Calcular:

1. su posición relativa y la distancia que las separa.

2. la recta que es perpendicular a ambas.

Solución:

1.
$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, 1) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases}$$

Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s} = (-2, 1, 0)$, y tenemos

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\overline{A}| = -5 \neq 0$$

En conclusión Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$ Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |-5| = 5$$

Calculamos $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - j - 3k = (2, -1, -3) \Longrightarrow |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \sqrt{14}$$

Tenemos, por tanto

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{14}$$

2. Obtenemos t, la recta perpendicular a r y a s, como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (2, -1, -3)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, -3) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x + 5y + z - 4 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, -3) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & x+1 \\ 1 & -1 & y-1 \\ 1 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - 4y + 2z + 5 = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + 5y + z - 4 = 0 \\ x - 4y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

Problema 159 1. Calcula el área de un triángulo de vértices $A(3,1,0)$, $B(2,0,-1)$ y $C(4,1,-1)$.

2. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi : x-y-z-1=0$ con la recta $s: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=z$ y es paralela a la recta

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y\qquad +2=0\\ 3x+y+z-1=0\end{array}\right.$$

Solución:

1.

$$\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-1);\quad \overrightarrow{AC}=(1,0,-1)$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}|=|(1,-2,1)|=\sqrt{6}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

2. Calculamos la intersección de π y la recta s:

$$s:\left\{\begin{array}{l} x=2t\\ y=1+2t\\ z=t\end{array}\right. \Longrightarrow 2t-(1+2t)-t-1=0 \Longrightarrow t=-2 \Longrightarrow P(-4,-3,-2)$$

La recta pedida pasará por este punto y tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u}=(2,-1,0)\times(3,1,1)=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-1,-2,5)$$

La recta pedida es

$$\frac{x+4}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+2}{5}$$

Problema 160 Discutir la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro a.

$$\left\{\begin{array}{lrrrr} \pi_1: & -x+ & 2y+ & z= & 0\\ \pi_2: & & ay+ & 4z= & 8\\ \pi_3: & & 4y+ & az= & 8\end{array}\right.$$

Solución

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 4 & 8 \\ 0 & 4 & a & 8 \end{array} \right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \Longrightarrow |A| = -(a^2 - 16) = 0 \Longrightarrow a = 4, \; a = -4$.

Si $a \neq 4$ y $a \neq -4$ tendremos que $|A| \neq 0$ por lo que Rango(A) =Rango$(\overline{A}) =$ 3 =nº de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $a = 4$ tendremos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{array} \right)$$

Vemos que tiene dos filas iguales, y además $\left| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{array} \right| = -4 \neq 0$. Por lo que podemos concluir en este caso que Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$nº incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado. Los planos π_2 y π_3 son coincidentes, y el plano π_1 los corta en una recta.

Si $a = -4$ tendremos:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array} \right)$$

Primero tenemos que $\left| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{array} \right| = 4 \neq 0$, por lo que Rango$(A) = 2$.

Como

$$\left| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & 8 \end{array} \right| = 64 \neq 0$$

tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3$

En este caso, por tanto, Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$. El sistema es Incompatible y para ver la posición de los planos los comparamos dos a dos. Vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos, y el plano π_1 los corta a los dos.

Problema 161 Dados los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 4, 2)$ y $C(1, 3, 1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.

2. Calcular la distancia de este plano al origen de coordenadas.

3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. Determinamos

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 2)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 2, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 2) \\ A(1, 2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & x-1 \\ 2 & 1 & y-2 \\ 3 & 2 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x - 4y + 2z + 9 = 0$$

2.

$$d(O, \pi) = \frac{|9|}{\sqrt{1 + 16 + 4}} = \frac{9\sqrt{21}}{21} = 1,963961012\, u$$

3.

$$V = \frac{1}{3}(\text{área base}) \cdot \text{altura} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$$

$$\overrightarrow{OA} = (1, 2, -1), \quad \overrightarrow{OB} = (3, 4, 2), \quad \overrightarrow{OC} = (1, 3, 1)$$

$$V = \frac{1}{6}| \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right| | = \frac{1}{6}|-9| = \frac{3}{2} = 1,5\, u^3$$

Problema 162 Sea el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

1. Hallar el punto simétrico del $(0, 0, 0)$ respecto de π.

2. Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ.

3. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.

Solución:

1. Calculo r, recta perpendicular a π que pasa por $P(0, 0, 0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, 3) \\ P(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{array} \right.$$

Esta recta cortará con el plano π en el punto P'':

$$t + 2(2t) + 3(3t) = 6 \Longrightarrow t = \frac{3}{7} \Longrightarrow P''\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$$

El punto simétrico P' de P tendrá por punto medio a P'', es decir:

$$P'' = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2P'' - P = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$$

El punto simétrico de $P(0,0,0)$ respecto al plano π es $P'\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$.

2.

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{u} = (0,0,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - y = 0$$

3. Los puntos de corte de π con los ejes será:

Corte con el eje OX: $y = 0$, $z = 0 \Longrightarrow x = 6 \Longrightarrow A(6,0,0)$
Corte con el eje OY: $x = 0$, $z = 0 \Longrightarrow y = 3 \Longrightarrow B(0,3,0)$
Corte con el eje OZ: $x = 0$, $y = 0 \Longrightarrow z = 2 \Longrightarrow C(0,0,2)$

Tendremos: $\overrightarrow{OA} = (6,0,0)$, $\overrightarrow{OB} = (0,3,0)$, $\overrightarrow{OC} = (0,0,2)$:

$$V = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12\, u^3$$

Problema 163 .

1. Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.

2. Describir dicho conjunto.

Solución:

1. Un punto del plano $z = 0$ será $P(x, y, 0)$

$$d(P, \pi) = \frac{|2x - y - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 3 \Longrightarrow |2x - y - 4| = 9 \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y - \ \ 13 = 0 \\ 2x - y + \ \ \ 5 = 0 \end{cases}$$

2. El conjunto esta formado por dos planos paralelos:

$$\{x \in R : |2x - y - 4| = 9\}$$

Problema 164 El plano $\pi : 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

1. Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
2. Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
3. Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

Solución:

1. Corte con el eje OX: $y = 0,\ z = 0 \Longrightarrow x = -1 \Longrightarrow A(-1, 0, 0)$
   Corte con el eje OY: $x = 0,\ z = 0 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow B(0, 1, 0)$
   Corte con el eje OZ: $x = 0,\ y = 0 \Longrightarrow z = -2 \Longrightarrow C(0, 0, -2)$

   La altura será: $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{0 + 0 + 4} = 2,\quad (\overrightarrow{OC} = (0, 0, -2))$

2. La recta pedida tiene de vector director a $\overrightarrow{OC}$, y pasa por el punto $O(0, 0, 0)$:
$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

3. $\overrightarrow{AC} = (0, 0, -2) - (-1, 0, 0) = (1, 0, -2)$
   $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (-1, 0, 0) = (1, 1, 0)$
$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \left|\begin{array}{ccr} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right| = (-2, 2, 1)$$
$$S = |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3\ u^2$$

Problema 165 *(3 puntos)* Dado el punto $P(1, 3, -1)$, se pide:

1. (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.
2. (2 puntos) Calcular los puntos de la recta
$$\left\{\begin{array}{lrr} x = & & 3\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & 4\lambda \end{array}\right.$$
   cuya distancia a P es igual 3.

Solución:

1. Se trata de la ecuación de una esfera

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-6y+2z+2=0$$

2. Sustituimos un punto genérico de la recta en la esfera y obtenemos

$$(3\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(1-4\lambda)^2-2(3\lambda)-6(1+\lambda)+2(1-4\lambda)+2=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 26\lambda(\lambda-1)=0 \Longrightarrow \lambda=1,\ \ \lambda=0$$

Sustituyendo en la recta estos valores tendremos los puntos buscados:

Para $\lambda=0 \Longrightarrow (0,1,1)$ y para $\lambda=1 \Longrightarrow (3,2,-3)$.

Problema 166 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4} \quad s: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

1. (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

2. (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s.

Solución:

1.

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,3,4) \\ P_r(1,1,1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(1,-1,2) \\ P_s(-1,2,0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(10,0,-5)$$

Para la construcción de la recta podemos poner $\overrightarrow{u_t}=(2,0,-1)$, ya que el módulo de este vector no influye.

Construimos la recta como intersección de dos planos:

$$\pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{u_t}=(2,0,-1) \\ \overrightarrow{u_r}=(2,3,4) \\ P_r(1,1,1) \end{cases} \qquad \pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{u_t}=(2,0,-1) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,2) \\ P_s(-1,2,0) \end{cases}$$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 0 & y-1 \\ 4 & -1 & z-1 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow 3x-10y+6z+1=0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ 2 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 5y + 2z - 9 = 0$$

$$t : \begin{cases} 3x- & 10y+ & 6z + 1 = 0 \\ x+ & 5y+ & 2z - 9 = 0 \end{cases}$$

2.

$$\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-15|}{\sqrt{10^2 + 5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (-2, 1, -1)$$

Capítulo 3

Problemas de Análisis

Problema 167 Dada la función $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ se pide:

1. Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos. Dibujo aproximado de la gráfica.
2. Calcular el área encerrada entre la gráfica $f(x)$ y el eje de abcisas.

Solución:

1. (a) Dominio: La función $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ está compuesta por el producto de dos funciones, la función $h(x) = x$ cuyo dominio es todo el eje de abcisas, y la función $t(x) = \sqrt{4-x^2}$ cuyo dominio está definido por la incuación $4 - x^2 \geq 0$. La solución de esta inecuación será: $-x^2 \geq -4 \Longrightarrow x^2 \leq 4 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2$. En conclusión podemos asegurar que el dominio de la función pedida será el intervalo $[-2, 2]$.

   (b) Puntos de corte con los ejes: Los puntos de corte con el eje de abcisas vendrán determinados cuando $f(x) = 0$, es decir, $x\sqrt{4-x^2} = 0$, ecuación que nos produce las soluciones: $x = 0$, $x = 2$, y $x = -2$. Por tanto la gráfica cortará al eje de abcisas en los puntos $(0, 0)$, $(2, 0)$ y en el $(-2, 0)$. Ahora calculamos los cortes con el eje de ordenadas, es decir, hacemos $x = 0$, lo que nos produce una única solución que ya habíamos obtenido antes, y es el punto $(0, 0)$.

   (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: Para ello calculamos la primera derivada, que sería la siguiente:

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2}(4-x^2)^{-1/2}(2x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Ahora tendremos que ver cuando esta derivada es positiva, es nula, o es negativa. Para ello igualamos la derivada a cero, lo que nos daría lo siguiente:

$$f'(x) = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Longrightarrow 4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

Ahora, recordando los puntos de corte con los ejes, el dominio de la función y observando que el denominador es siempre positivo, es fácil comprobar lo que nos piden.
Entre $x = -2$ y $x = -\sqrt{2}$ el numerador de la derivada se hace negativo, luego $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ decreciente en $[-2, -\sqrt{2}]$
Entre $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ el numerador de la derivada se hace positivo, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ creciente en $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
Entre $x = \sqrt{2}$ y $x = 2$ el numerador de la derivada se hace negativo, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ decreciente en $[\sqrt{2}, 2]$

(d) A la vista del apartado anterior, está claro que, la función tiene un mínimo en $-\sqrt{2}$ y un máximo en $\sqrt{2}$, resultados que al sustituidos en la función original darían los puntos: Mínimo= $(-\sqrt{2}, -2)$ y Máximo= $(\sqrt{2}, 2)$

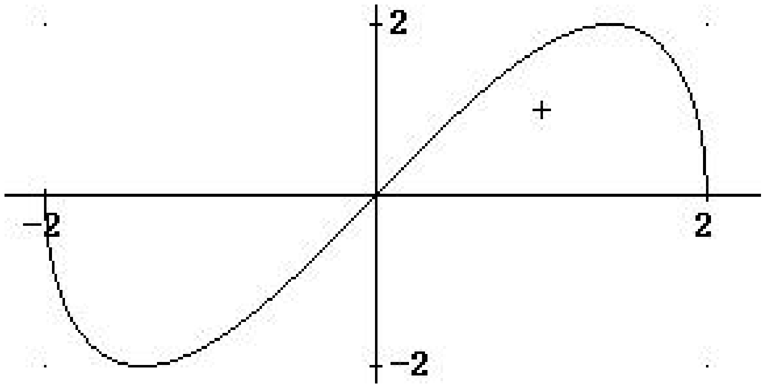
(e) Para dibujar la gráfica ordenamos los resultados en una tabla, y los interpretamos cuidadosamente.

x	f(x)	
0	0	
2	0	
-2	0	
$-\sqrt{2}$	-2	Mínimo
$\sqrt{2}$	2	Máximo

2. Los puntos de corte con el ejes de abcisas son -2, 0, 2. La función es impar, es decir, simétrica respecto al origen, esto se aprecia fácilmente en su representación gráfica. Esto último se puede demostrar comprobando $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{4 - (-x)^2} = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x)$$

Esto quiere decir que el área que encierra la curva entre el punto $(-2, 0)$ y el $(0, 0)$ es igual que el área que encierra la curva entre los puntos $(0, 0)$ y el $(2, 0)$. Por tanto bastará con calcular una de estas áreas y



multiplicar por 2.

$$A = 2\int_0^2 f(x) = 2\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$$

Resolveremos por sustitución.
$u = 4 - x^2 \Longrightarrow du = -2xdx \Longrightarrow xdx = -\frac{du}{2}$ y sustituyendo nos queda la integral siguiente:

$$\int x\sqrt{4-x^2} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{u^{3/2}}{3} + C$$

y deshaciendo el cambio de variable nos quedaría:

$$A = 2\left[-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^2 = 2\left[\frac{4^{3/2}}{3}\right] = \frac{16}{3}$$

Problema 168 Calcular:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$$

2.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

3. Utilizando el cambio de variable $\ln x = t$, calcular:

$$I = \int_1^e \frac{1+\ln x^2 + (\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx$$

Solución:

1. Descomponiendo los polinomios según sus raices tendremos que $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ y $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Sustituyendo:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty$$

2. Para solucionar este límite voy a emplear dos métodos:

   (a)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = [1^\infty] = e^\lambda$$

   Donde

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow \infty} x\left(1 + \frac{1}{x^2} - 1\right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

   Luego

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = e^\lambda = e^0 = 1$$

   (b)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = A$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \ln A$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln A$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

   En esta condiciones podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{-2/x^3}{1+1/x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{\infty} = 0$$

   Es decir, $\ln A = 0 \Longrightarrow A = 1$

3. Primero voy a solucionar la integral sin tener en cuenta los límites de integración y luego los aplicaremos.

La integral la vamos a resolver por sustitución, haciendo $\ln x = t \Longrightarrow \frac{1}{x}dx = dt$ y sustituyendo tendremos:

$$\int \frac{1+\ln x^2+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx = \int \frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx = \int \frac{1+2t+t^2}{(1+t)}dt =$$

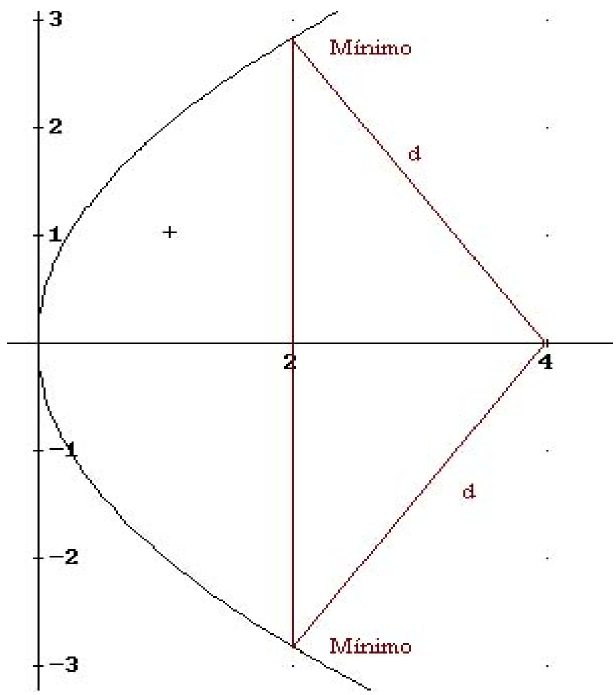
$$\int \frac{(1+t)^2}{1+t}dt = \int (1+t)dt = t+\frac{t^2}{2}+C = \ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}+C$$

$$I = \left[\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \ln e+\frac{(\ln e)^2}{2}-\left(\ln 1+\frac{(\ln 1)^2}{2}\right) = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Problema 169 Determina los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que estén a distancia mínima del punto $(4,0)$.

Solución:

Un punto genérico de la gráfica sería de la forma $(x, \sqrt{4x})$, y la distancia



de este punto al $(4,0)$ será:

$$d = \sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{4x}-0)^2} = \sqrt{x^2+4x+16}$$

Tendremos que calcular los mínimos de esta función, y para ello calculamos la primera derivada.

$$d' = \frac{1}{2}(x^2+4x+16)^{-1/2}(2x-4) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2+4x+16}} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada primera. Como el denominador es siempre positivo, basta estudiar el numerador:
Si $x < 2 \Longrightarrow\ d' < 0 \Longrightarrow$ decrece
Si $x > 2 \Longrightarrow\ d' > 0 \Longrightarrow$ crece
Con ésto concluimos con que en la abcisa $x = 2$ tenemos un mínimo, calculamos ahora las ordenadas correspondientes sustituyendo en la función $y^2 = 4x$, y obtenemos: $y = \pm\sqrt{4x} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.
Tenemos, por tanto, dos puntos que cumplen la condición de mínimo $(2, -2\sqrt{2})$ y $(2, 2\sqrt{2})$.

Problema 170 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

se pide:

1. Dominio.
2. Corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Máximos y mínimos.
6. Dibujo aproximado de la gráfica.

Nota: Una función es simétrica respecto al eje Y si $f(-x) = f(x)$, y simétrica respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$.
Solución:

1. D=$\{x \in R$ tales que $x^2 - 4 \neq 0\} = R - \{-2, 2\}$
2. (a) Puntos de corte con el eje Y:
   $x = 0 \Longrightarrow f(x) = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$ la gráfica corta al eje Y en $(0, -\frac{3}{4})$.
   (b) Puntos de corte con el eje X:
   $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Longrightarrow$ la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto la gráfica no corta al eje X en ningún punto.
3. $f(-x) = \frac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4} = \frac{x^2+3}{x^2-4} = f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al eje Y.

4.
$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x-6x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

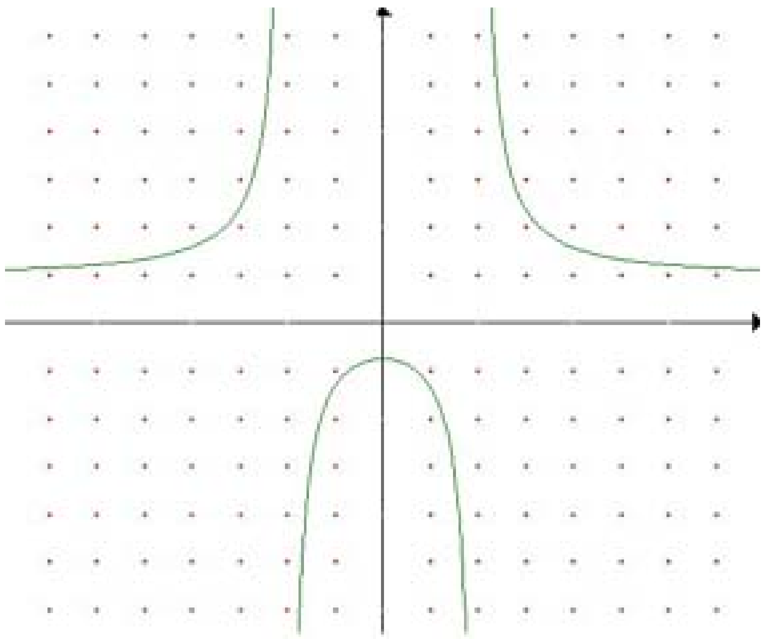
Como $(x^2-4)^2 \geq 0$ para cualquier x, bastará estudiar el signo del numerador:

(a) Si $x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ creciente.
(b) Si $x > 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow$ decreciente.

En el dominio de la función tendremos que la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

5. $f'(x) = 0 \Longrightarrow -14x = 0 \Longrightarrow x = 0$ que corresponde al punto $(0, -\frac{3}{4})$, punto en el que la gráfica pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, estamos ante un máximo.

6. Su representación gráfica sería:



Calculado las asíntotas, las habríamos encontrado verticales en $x = -2$ y $x = 2$, y horizontales en $y = 1$, ya que $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1$.

Problema 171 1. Calcular:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x\cdot e^{x^2}}{-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}}{-\cos x}=$$
$$=-2.$$

2. Determina el valor de a para que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=e$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{ax}=[1^\infty]=e^\lambda$$
$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}ax\left(\frac{x+3}{x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}ax\left(\frac{3}{x}\right)=3a$$

Como $\lambda=1\Longrightarrow 3a=1\Longrightarrow a=\frac{1}{3}$.

3. Calcular utilizando el cambio de variable adecuado :

$$\int\frac{x}{(1-2x^2)^2}dx$$

Solución:
Hacemos $u=1-2x^2\Longrightarrow du=-4x\cdot dx\Longrightarrow\frac{du}{-4}=x\cdot dx$ y sustituimos:

$$\int\frac{x}{(1-2x^2)^2}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{1}{4u}+C=\frac{1}{4(1-2x^2)}$$
$$+C$$

Problema 172 Hallar todas las funciones f cuya derivada es:

$$f'(x)=\frac{x^4+x+1}{x^2+x}$$

indicando el dominio de definición de éstas.
Solución:

- Tenemos que calcular las primitivas de $f'(x)$, como el polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador, primero dividimos los dos polinomios:

$$\begin{array}{rl}
x^4+0x^3+0x^2+x+1 & |x^2+x \\
\underline{-x^4-\ x^3\qquad\qquad\quad} & \overline{x^2-x+1} \\
-x^3+0x^2+x+1 & \\
\underline{+x^3+\ x^2\qquad\quad} & \\
x^2+x+1 & \\
\underline{-x^2-x\quad\ } & \\
1 &
\end{array}$$

Tenemos, por tanto, que calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x^4+x+1}{x^2+x}dx = \int \left(x^2-x+1+\frac{1}{x^2+x}\right)dx = \int (x^2-x+1)dx + \int \frac{dx}{x^2+x}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x(x+1)}$$

Tendremos que calcular esta última integral, lo haremos por descomposición polinómica:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ A=1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \end{array} \right.$$

Luego tendremos:

$$\int \frac{x^4+x+1}{x^2+x}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln(x) - \ln(x+1) + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + C$$

- Ahora calculamos el dominio de estas funciones:
  Como tenemos un logaritmo neperiano podremos decir que el dominio D de esta función sería: $D = \{x \in R \text{ tales que } \dfrac{x}{x+1} > 0 \text{ y } x \neq -1\}$
  Para hallar esta región tenemos que estudiar el signo de $\dfrac{x}{x+1}$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
signo x	$-$	$-$	$+$
signo $(x+1)$	$-$	$+$	$+$
signo $\frac{x}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

En conclusión, tendremos que el dominio será:

$$\boxed{D = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)}$$

Problema 173 Responda a las siguientes cuestiones referidas a la curva

$$y = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

Se pide:

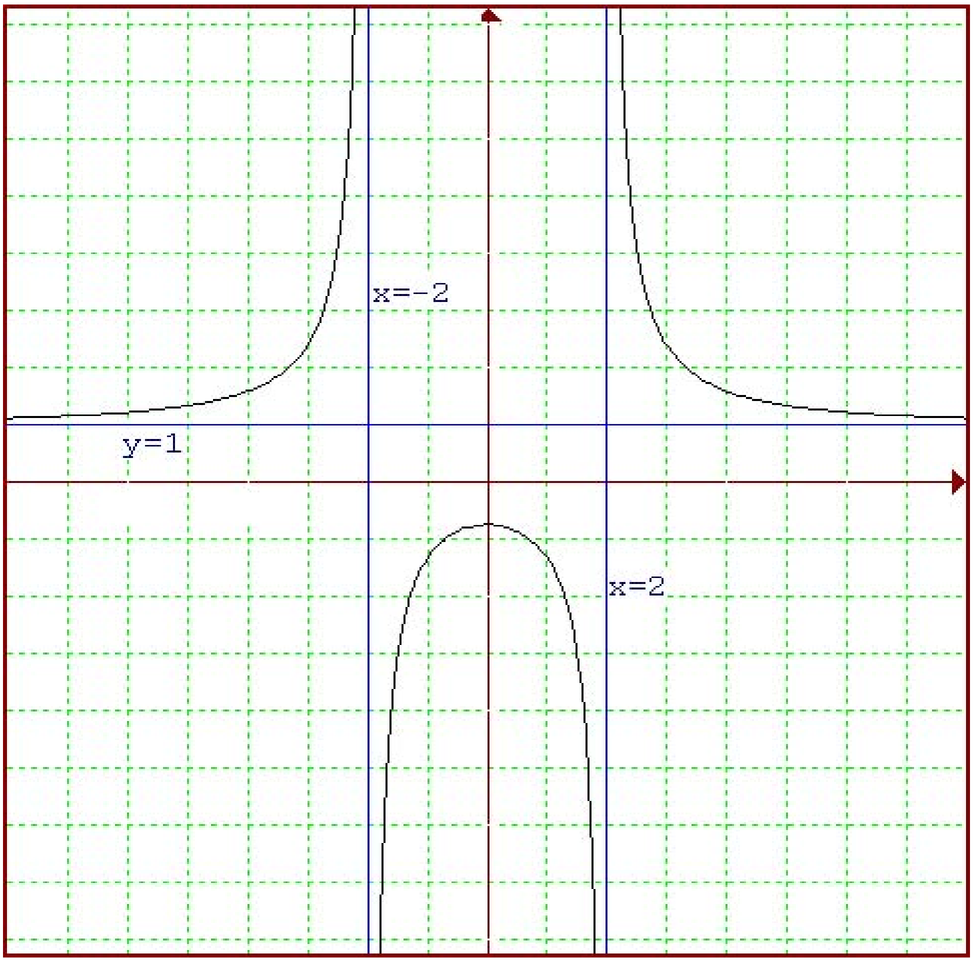
1. Dominio de definición.
2. Simetría.
3. Cortes a los ejes.
4. Asíntotas.
5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Máximos y mínimos.
7. Representación aproximada.

Solución:

1. El dominio será toda la recta real, excepto en aquellos puntos el los que se anula el denominador, dicho de otra manera será $D = \{x \in R;\ x^2 - 4 \neq 0\} = R - \{-2, 2\}$
2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 3}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = f(x)$
   Luego la función es par, y por tanto simétrica respecto al eje Y.
3. Con el eje X hacemos $y = 0$ y nos queda:
   $0 = \frac{x^2+3}{x^2-4} \Longrightarrow\ x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de corte con el eje X.
   Con el eje Y hacemos $x = 0$ y nos queda:
   $f(0) = \frac{0+3}{0-4} = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$ la función corta al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.
4. Asíntotas:
   - Verticales:
     $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty \Longrightarrow x = 2$ es una asíntota vertical

     $\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty \Longrightarrow x = -2$ es una asíntota vertical
   - Horizontales:
     $y = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1 \Longrightarrow\ y = 1$ es una asíntota horizontal.
   - Oblicuas:
     $y = ax + b$ es una asíntota oblicua, entoces $a = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2 + 3}{x(x^2 - 4)} = 0 \Longrightarrow$ no hay asíntotas oblicuas.
5. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento calcularemos la primera derivada:

$$y' = -\frac{14x}{(x^2 - 4)^2}$$


x=-2
y=1
x=2

Para que exista un punto crítico imponemos que $y' = 0$ y nos queda:

$$\frac{14x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow 14x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Analizamos el signo de y':

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
signo y'	$+$	$+$	$-$	$-$
y	**creciente**	**creciente**	**decreciente**	**decreciente**

En resumen:

- La función crece en $(-\infty,-2) \cup (-2,0)$
- La función decrece en $(0,2) \cup (2,+\infty)$

6. Observamos que en el punto de abcisa $x = 0$ la curva pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, en el punto $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$ tiene un máximo.

7. Representación gráfica:

Problema 174 Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

1. (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abcisa positiva de la gráfica de f.

2. (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

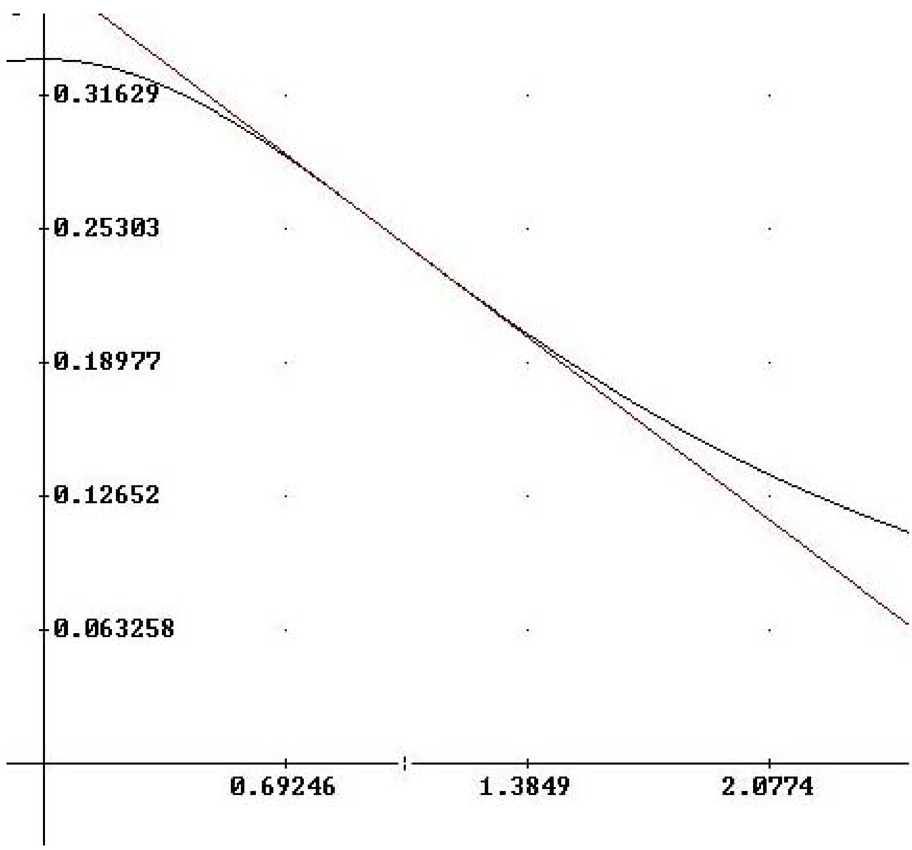
Solución:

1. Para encontrar los puntos de inflexión tendremos que ver los puntos en los que se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

Es decir, tenemos que calcular los puntos que hacen $f''(x) = 0$. Como el denominador $(x^2+3)^3$ no se anula nunca, los puntos buscados son aquellos que anulen el numerador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, de estas dos soluciones sólo nos interesa la positiva, que es la que nos pide


0.31629
0.25303
0.18977
0.12652
0.063258
0.69246
1.3849
2.0774

el problema. Si sutituimos este punto en la función obtendremos la ordenada correspondiente: $f(1) = \frac{1}{4}$, luego la recta pedida pasará por el punto $(1, \frac{1}{4})$. Para encontrar la pediente utilizamos la primera derivada $m = f'(1) = -\frac{1}{8}$ En conclusión, la recta tangente será:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1) \Longrightarrow x + 8y - 3 = 0$$

2. El recinto pedido se calcularía mediante la integral siguiente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}\,dx + \int_1^3 \frac{3-x}{8}\,dx$$

Calculamos la integral

$$\int \frac{1}{x^2-3}\,dx = \int \frac{dx}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan t = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x}{\sqrt{3}} = t \quad dx = \sqrt{3}dt$
Luego:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}\,dx + \int_1^3 \frac{3-x}{8}\,dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 + \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{1}{4}$$

Problema 175 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x \ge -1 \\ \\ \frac{2x}{x-1} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

1. (Estudiar el dominio y la continuidad de f.
2. Hallar las asíntotas de la gráfica de f.
3. Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

1. Calculamos el dominio:

- Si $x \geq 1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único plosible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty, -1)$.
- En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

Calculamos la continuidad:
La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supueto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

- En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$

  Luego f es continua en $x = -1$.
- En $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

  Luego no es continua en $x = 0$.
- En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

2. Asíntotas verticales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

  Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.
- Cuando $x < -1$:
  No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

Asíntotas horizontales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

  Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:

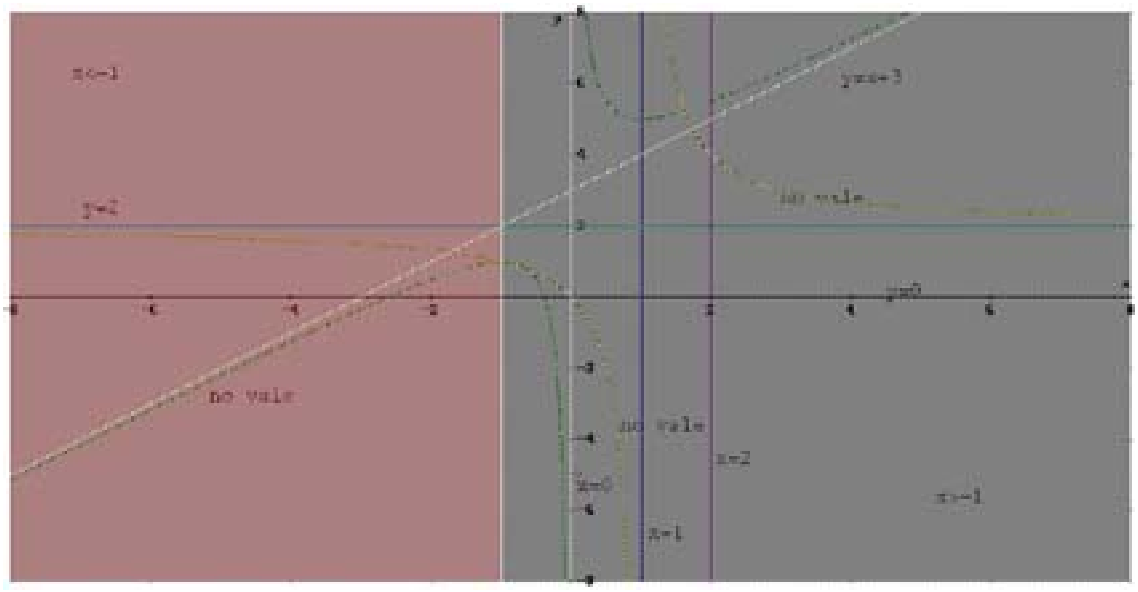
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x}{x - 1} = 2$$

  Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:
Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$$



- Cuando $x \geq -1$:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{x^2 + 3x + 1}{x} - x) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x+1}{x}=3$$

Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y=x+3$.

- Cuando $x<-1$:

$$a=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2x}{x-1}}{x}=0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas en este intervalo.

3. El recinto comprendido entre las rectas $x=1$ y $x=2$ está en el intervalo $(-1,+\infty)$ donde la función es $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y=0$(el eje de abcisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\int_1^2\frac{x^2+3x+1}{x}dx=\int_1^2(x+3+\frac{1}{x})dx=\left[\frac{x^2}{2}+3x+\ln|x|\right]_1^2=$$

$$=\frac{4}{2}+6+\ln 2-\frac{1}{2}-3-\ln 1=\frac{9}{2}+\ln 2$$

Problema 176 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f:R\longrightarrow R$ dada por:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lcr}x^2+3 & \text{si} & x<0\\ ax+b & \text{si} & 0\le x\le 2\\ x^3-1 & \text{si} & x>2\end{array}\right.$$

Solución:

- En $x=0$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}f(x)=3\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}f(x)=b\end{array}\right.\Longrightarrow b=3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x=0.$$

- En $x=2$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-}f(x)=2a+b=2a+3\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+}f(x)=7\end{array}\right.\Longrightarrow a=2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x=2$.

En conclusión, f es continua si $a=2$ y $b=3$ en todo R.

Problema 177 Calcular por la regla de L'Hôpital

1. $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1}$

   Solución:

   $$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{e^x}=\frac{0}{1}=0$$

2. $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1-\cos x+x^2}{2x^2}$

   Solución:

   $$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x+x^2}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x+2x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x+2}{4}=$$

   $$=\frac{3}{4}$$

Problema 178 Calcular:

1. $$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$

   Solución:

   $$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$
   $$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$
   $$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}}=\frac{2}{3}$$

2. $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

   Solución:

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=[3^\infty]=\infty$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

4.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

Problema 179 Calcular:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{4}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\cos x-1)}{x}\cdot(\cos x+1)=0$$

Problema 180 Halla los valores de a y de b para que sea derivable y continua la función $f: R\longrightarrow R$ dada por:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^2+ax+b & \text{si} \quad x\le 0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x>0\end{array}\right.$$

en el punto $x = 0$.

Solución:

Tenemos que estudiar la continuidad, y para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ tiene que cumplir

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}(x^2 + ax + b) = b$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$f(0) = b$$

Luego $b = 1$

Si la función es derivable en $x = 0$, entonces es continua en ese punto. Para que sea derivable debe de cumplirse que $f'(0^-) = f'(0^+)$

Para calcular $f'(0^-)$ calculamos la derivada de la rama correspondiente y sustituimos $x = 0$

$$f'(x) = 2x + a \Longrightarrow f'(0^-) = a$$

Para calcular $f'(0^+)$ calculamos la derivada de esta rama empleamos límites, hay que tener en cuenta que $f(0) = b = 1$

$$f'(0^+) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\ln(1 + h) - h}{h^2} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{2h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1 - (1 + h)}{2h(1 + h)} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{-h}{2h + 2h^2} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{-1}{2 + 4h} = -\frac{1}{2}$$

Para que sea derivable $f'(0^-) = f'(0^+) \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Por tanto $b = 1$ y $a = -\dfrac{1}{2}$

Problema 181 Calcular

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x + 1}}{e^x}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{e^x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{2e^x\sqrt{x+1}}=0$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}$

   Solución:

   $$\lim_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}=$$
   $$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}=$$
   $$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{1}{x}+1-\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=\left[\frac{2}{\infty}\right]$$

   Observando el límite vemos que

   $$\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=0\\[2ex] \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}} \quad \text{no tiene sentido}\end{cases}$$

   Podemos concluir con que el límite no existe.

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$

   Solución:

   LLamamos $L=\lim\limits_{x\longrightarrow\pi/2}(\sin x)^{\tan x}\Longrightarrow \ln L=\lim\limits_{x\longrightarrow\pi/2}\ln(\sin x)^{\tan x}$

   $$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\ln(\sin x)^{\tan x}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\tan x\ln(\sin x)=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}}=$$
   $$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1/\cos^2 x}{\tan^2 x}}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\cos x\tan^2 x}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\cos^2 x\tan^2 x}{-\tan x}=$$

   $$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}-\frac{\cos^2 x\cdot\sin x}{\cos x}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}(-\cos x\cdot\sin x)=0$$

   Luego tenemos que $\ln L=0\Longrightarrow e^0=L\Longrightarrow L=1$, es decir,

$$\lim_{x\longrightarrow \pi/2}(\sin x)^{\tan x} = 1$$

Problema 182 Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$ y $g(x) = \ln(x+8)$, escribir la función $g\circ f$ y calcular su derivada.

Solución:

$$u = g\circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}+8\right)$$

$$u' = \frac{\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-2/3}(2x+1)}{\sqrt[3]{x^2+x+1}+8} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)+24\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

Problema 183 Calcular las funciones derivadas de las siguientes:

1. $f(x) = \dfrac{2x^3}{\cos x}$

   Solución:

   $$f'(x) = \frac{6x^2\cos x - 2x^3(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2x^2(3\cos x + x\sin x)}{\cos^2 x}$$

2. $g(x) = \frac{2}{3}\ln(5x)$

   Solución:

   $$g'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{5x} = \frac{2}{3x}$$

3. $h(x) = \frac{1}{2}e^{5x-3}$

   Solución:

   $$h'(x) = \frac{1}{2}e^{5x-3}\cdot 5 = \frac{5}{2}e^{5x-3}$$

Problema 184 Dada la curva de ecuación $y = -x^2+26x$, cálculese la recta tangente a la misma que sea paralela a la recta de ecuación $y = -x$.

Solución:

La recta $y = -x$ tiene de pendiente $m = -1$. La recta tangente a la función tiene que tener esta pendiente que, como sabemos, se obtiene a partir de la primera derivada.

$y' = -2x + 26 = -1 \Longrightarrow x = \dfrac{27}{2},\ \ y = \dfrac{675}{4}$

La recta pedida pasa por el punto $\left(\dfrac{27}{2}, \dfrac{675}{4}\right)$ y tiene de pendiente $m = -1$, aplicando la ecuación de la recta punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ tenemos que

$$y - \frac{675}{4} = -\left(x - \frac{27}{2}\right) \Longrightarrow x + y = \frac{729}{4}$$

Problema 185 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = e^{\dfrac{2x}{x^2+1}}$$

1. Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
2. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).
3. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:** No tiene, ya que el dominio de la función es todo R.
   - **Asíntotas horizontales:**

     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

     Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.
   - **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
     Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

     $$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{x} = 0$$

     Luego no hay asíntotas oblicuas.

2. Este apartado tiene dos subapartados

   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

     $$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

     Que serían los puntos $(1, e)$ y $(-1, e^{-1})$

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

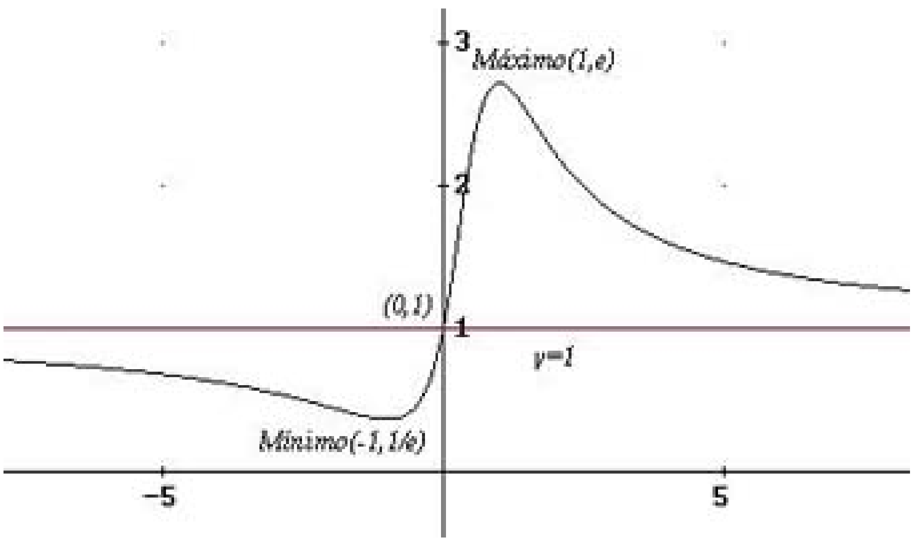
$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo y lo mismo ocurre con $e^{\frac{2x}{x^2+1}}$, el estudio del signo se reduce al de $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$1+x$	$-$	$+$	$+$
$(1-x)(1+x)$	$-$	$+$	$-$
	decreciente	creciente	decreciente

En el punto $(1, e)$ la función tiene un máximo, pasa de crecinte a decreciente. En el punto $(-1, e^{-1})$ la función tiene un mínimo, pasa de decrecinte a creciente.

3. Para dibujar la gráfica sólo faltaría algún punto de corte con los ejes $x = 0 \Longrightarrow (0, 1)$ único punto de corte, ya que con el eje de abcisa no habría ninguno.



Problema 186 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{9x - 3}{x^2 - 2x}$$

1. Calcular el dominio de f.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
4. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

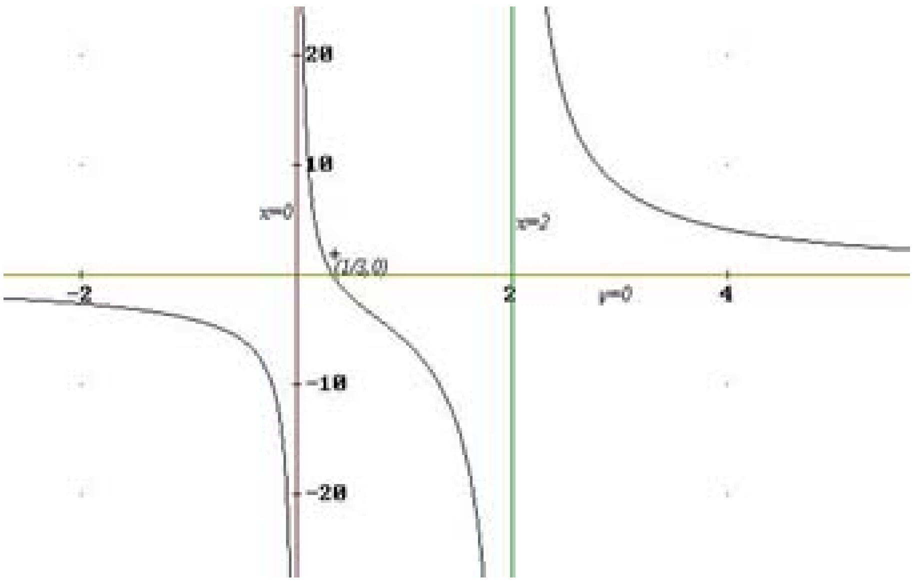
1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos el los que se anule el denominador; $x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2 \Longrightarrow Dom(f) = R - \{0, 1\}$
2. Calculamos las asíntotas
   - **Asíntotas verticales:**
   $$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{9x - 3}{x^2 - 2x} = \pm\infty$$
   Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.
   $$\lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{9x - 3}{x^2 - 2x} = \pm\infty$$
   Luego $x = 2$ es una asíntota vertical.
   - **Asíntotas horizontales:**
   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9x - 3}{x^2 - 2x} = 0$$
   Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.
   - **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
   Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que
   $$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{9x-3}{x^2-2x}}{x} = 0$$
   Luego no hay asíntotas oblicuas.
3. Este apartado tiene dos subapartados
   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero
   $$f'(x) = -\frac{3(3x^2 - 2x + 2)}{x^2(x - 2)^2} = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$$
   Esta ecuación no tiene soluciones reales, y por tanto, no hay extremos relativos.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = -\frac{3(3x^2 - 2x + 2)}{x^2(x-2)^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $3x^2 - 2x + 2$, que es siempre positivo. Luego $f'(x) < 0$ y por tanto la función es siempre decreciente.

4. Para dibujar la gráfica sólo faltaría algún punto de corte con los ejes $y = 0 \Longrightarrow (1/3, 0)$ único punto de corte, ya que con el eje de ordenadas no habría ninguno.



Problema 187 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 2}{2x - 1}\right)$$

1. Calcular el dominio de f.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
4. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos que $\dfrac{x^2-2}{2x-1} < 0$

$$Dom(f) = \left\{ x \in R : \frac{x^2-2}{2x-1} > 0 \right\}$$

2. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \longrightarrow 1/2} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1/2} \ln \left(\frac{x^2-2}{2x-1} \right) = \pm\infty$$

   Luego $x = \dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \pm\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2-2}{2x-1} \right) = -\infty$$

   Luego $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ son asíntotas verticales.

   - **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2-2}{2x-1} \right) = \infty$$

   Luego no tiene asíntotas horizontales.

   - **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x^2-2}{2x-1} \right)}{x} = 0$$

   Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. Este apartado tiene dos subapartados

   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

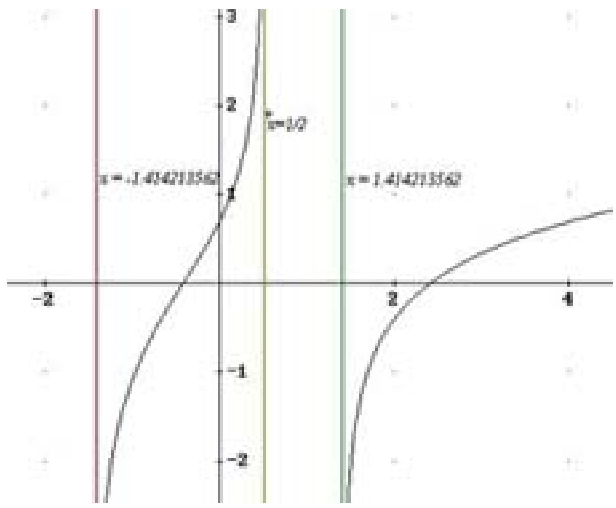
$$f'(x) = \frac{2(x^2-x+2)}{(x^2-2)(2x-1)} = 0 \Longrightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

   Esta ecuación no tiene soluciones reales, y por tanto, no hay extremos relativos.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada
$$f'(x) = \frac{2(x^2 - x + 2)}{(x^2 - 2)(2x - 1)}$$
Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del numerador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $(x^2 - 2)(2x - 1)$, que es siempre positivo en este dominio. Luego $f'(x) > 0$ y por tanto la función es siempre creciente.

4. Para dibujar la gráfica sólo faltarían los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje de abcisas
$$y = 0 \Longrightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 2}{2x - 1}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$
- Con el eje de ordenadas
$$x = 0 \Longrightarrow y = \ln 2$$
- Los puntos son
$$(0, \ln 2); \; (1 + \sqrt{2}, 0); \; (1 - \sqrt{2}, 0)$$



Problema 188 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

1. Calcular el dominio de f.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los máximos y mínimos de f.
4. Determina los puntos de inflexión de f.
5. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos que $x^3 = 0 \Longrightarrow Dom(f) = R - \{0\}$
2. Calculamos las asíntotas
   - **Asíntotas verticales:**
   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2-1}{x^3} = \pm\infty$$
   Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.
   - **Asíntotas horizontales:**
   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^3} = 0$$
   Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.
   - **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
   Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que
   $$a = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^3}}{x} = 0$$
   Luego no hay asíntotas oblicuas.
3. Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igualamos a cero
   $$f'(x) = \frac{3-x^2}{x^4} = 0 \Longrightarrow 3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}$$
   Para comprobar si son máximos o mínimos recurrimos a la segunda derivada
   $$f''(x) = \frac{2(x^2-6)}{x^5} \Longrightarrow \begin{cases} f''(\sqrt{3}) < 0 \\ f''(-\sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$
   Tenemos un mínimo en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$
   Tenemos un máximo en $\left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

4. Para calcular los puntos de inflexión hacemos $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{2(x^2-6)}{x^5} = 0 \Longrightarrow x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{6} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\sqrt{6}, -\dfrac{5}{6\sqrt{6}}\right) \\ \\ \left(\sqrt{6}, \dfrac{5}{6\sqrt{6}}\right) \end{array} \right.$$

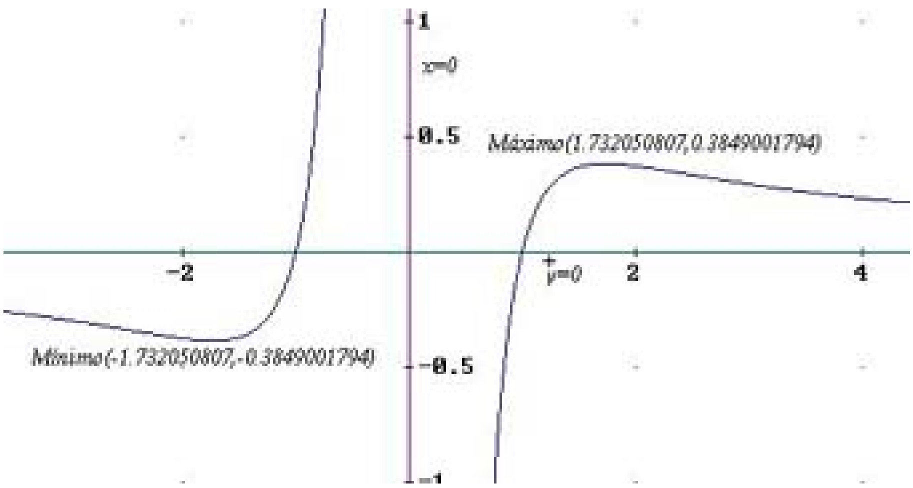
5. Para dibujar la gráfica sólo faltarían los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje de abcisas

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-1}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

- Con el eje de ordenadas no hay puntos de corte
- Los puntos son

$$(1, 0);\ (-1, 0)$$



Problema 189 Expresar el número 60 como suma de tres "enteros positivos"de forma que el segundo sea el doble del primero y su producto sea máximo. Determinar el valor de dicho producto.

Solución:

Tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y = 2x \end{array} \right. \Longrightarrow z = 60 - 3x$$

El producto de los tres números es $P(x) = x \cdot y \cdot z = x \cdot 2x \cdot (60 - x) = -6x^3 + 120x^2$, y este producto tiene que ser máximo.

$$P'(x) = -18x^2 + 240x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -18x + 240 = 0 \Longrightarrow x = \frac{40}{3} \end{cases}$$

Ahora tenemos que decidir el valor que corresponde a un máximo, para ello recurrimos a la segunda derivada

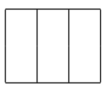
$$P''(x) = -36x + 240 \Longrightarrow \begin{cases} P''(0) = 240 > 0 \\ P''\left(\frac{40}{3}\right) = -240 < 0 \end{cases}$$

Luego cuando $x = 0$ tenemos un mínimo, y cuando $x = \dfrac{40}{3}$ es un máximo. Pero el problema nos dice sean "enteros positivos". Esto quiere decir que tendremos que decidirnos entre los dos números más próximos a $\dfrac{40}{3}$ que sean enteros, tenemos $13 < \dfrac{40}{3} < 14$, si sustituimos estos valores en la función $P(x)$ tendremos

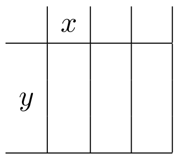
$$\begin{cases} P(13) = 120 \cdot 13^2 - 6 \cdot 13^3 = 7098 \\ P(14) = 120 \cdot 14^2 - 6 \cdot 14^3 = 7056 \end{cases}$$

Los tres números buscados son $x = 13$, $y = 26$ y $z = 60 - 3x = 21$. El valor del producto será $P(13) = 7098$.

Problema 190 Un solar rectangular de $11250\, m^2$ se divide en tres zonas rectangulares iguales (ver dibujo) para su venta. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución:



La función que hay que minimizar será $L = 6x + 4y$. Y sabemos que

$$S = 3x \cdot y = 11250 \Longrightarrow y = \frac{11250}{3x} = \frac{3750}{x} \Longrightarrow L(x) = 6x + \frac{15000}{x}$$

Para obtener los máximos y los mínimos utilizamos la primera derivada $L(x) = 0$.

$$L'(x) = 6 - \frac{15000}{x^2} = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 15000 = 0 \Longrightarrow x = 50,\ y = L(50) = 75$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que

$$L''(x) = \frac{30000}{x^3} \Longrightarrow L''(50) = \frac{30000}{50^3} > 0$$

Luego $x = 50$ es un mínimo, y podemos concluir con que la parcela tiene que tener de dimensiones $3x = 150\,m$ e $y = 75\,m$ para utilizar la menor valla posible.

Problema 191 Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $4\,cm$.

Solución:

Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada por $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 4 \Longrightarrow y = 4 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \dfrac{x(4-x)}{2} = \dfrac{4x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

$S'(x) = 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 2$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 2$ e $y = 2$, con un área $S(2) = 2\ u^2$

Problema 192 Halla la longitud de los lados del triángulo isósceles de área máxima cuyo perímetro sea $60\,m$.

Solución:

Sea a la longitud de la base de este triángulo isósceles y b la de los dos lados iguales, sea h la altura sobre a de este triángulo, que dividirá a dicha base en dos partes iguales, formando dos triángulos rectángulos con los lados b. Tendremos que el área viene dado por $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$, pero por otra parte tenemos que $h = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$, que sustituyendo en la primera expresión, y teniendo en cuenta $a + 2b = 60 \Longrightarrow a = 60 - 2b$, quedaría

$$S = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{(60 - 2b) \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{60-2b}{2}\right)^2}}{2} =$$

$$(30-b)\cdot\sqrt{b^2-(30-b)^2}=(30-b)\cdot\sqrt{b^2-(900+b^2-60b)}\Longrightarrow$$
$$S(b)=(30-b)\cdot\sqrt{60b-900}$$

Derivamos e igualamos a cero esta derivada

$$S'(b)=-\sqrt{60b-900}+(30-b)\cdot\frac{60}{2\cdot\sqrt{60b-900}}=$$
$$-\sqrt{60b-900}+(30-b)\cdot\frac{30}{\sqrt{60b-900}}=\frac{-(\sqrt{60b-900})^2+(30-b)\cdot 30}{\sqrt{60b-900}}=$$
$$\frac{-(60b-900)+(900-30b)}{\sqrt{60b-900}}=\frac{-60b+900+900-30b}{\sqrt{60b-900}}=\frac{1800-90b}{\sqrt{60b-900}}$$
$$S'(b)=\frac{1800-90b}{\sqrt{60b-900}}=0\Longrightarrow b=20,\;\; a=20$$

Para comprobar si se trata de un máximo recurrimos a la segunda derivada y calculamos $S''(20)$

$$S''(b)=\frac{-90\cdot\sqrt{60b-900}-(1800-90b)\cdot\dfrac{60}{2\cdot\sqrt{60b-900}}}{(\sqrt{60b-900})^2}=$$
$$\frac{-90(60b-900)-30(1800-90b)}{(60b-900)^{3/2}}=\frac{5400b+81000-54000+2700b)}{(60b-900)^{3/2}}\Longrightarrow$$
$$S''(b)=\frac{2700(1-10b)}{(60b-900)^{3/2}}\Longrightarrow S''(20)=-3\sqrt{3}<0$$

Luego es un máximo.

Problema 193 Un número más el cuadrado de otro número suman 48. Hallar ambos números para que su producto sea máximo.

Solución:

Sean los números x e y tenemos que $P=x\cdot y$, y sabemos que $x+y^2=48\Longrightarrow x=48-y^2$, sustituyendo en la primera función tenemos que $P(y)=y(48-y^2)=48y-y^3$. Para calcular el máximo calculamos la primera derivada e igualamos a cero, $P'(y)=0$.

$P'(y)=48-3y^2=0\Longrightarrow y^2=16\Longrightarrow y=4,\;\; y=-4$ con ambas tenemos que $x=32$. Comprobamos si es máximo o mínimo con la segunda derivada.

$P''(x)=-6y\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} P''(-4)=24\\ P''(4)=-24\end{array}\right.\Longrightarrow$ cuando $y=-4$ tenemos un mínimo, mientras que cuando $y=4$ es máximo. La solución buscada es, por tanto, $x=32$ e $y=4$.

Problema 194 Se ha construido un gran depósito cilíndrico de $81\pi\, m^3$ de volumen. La superficie lateral ha de ser construida con un material que cuesta $30\, euros/m^2$, y las dos bases con un material que cuesta $45\, euros/m^2$.

1. Determina la relación que hay entre el radio, r, de las bases circulares y la altura, h, del cilindro, y da el coste, $C(r)$, del material necesario para construir este depósito en función de r.

2. ¿Qué dimensiones (radio y altura) ha de tener el depósito para que el coste de los materiales necesarios para construirlo sea el mínimo posible?.

3. ¿Cúal será, en este caso, el coste del material?.

Solución:

1. Sabemos que

$$V = \pi r^2 \cdot h = 81\pi \Longrightarrow h = \frac{81}{r^2}$$

$$C(r) = 2\pi r h \cdot 30 + 2 \cdot \pi r^2 \cdot 45 = \frac{4860}{r}\pi + 90\pi r^2$$

2. Para que este coste sea mínimo calculamos su derivada e igualamos a cero $C'(r) = 0$.

$$C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi r = 0 \Longrightarrow -4860 + 180\pi r^3 = 0 \Longrightarrow$$
$$r^3 = 27 \Longrightarrow r = 3\, m,\ h = 9\, m$$

Calculamos la segunda derivada para comprobar si es un mínimo.

$$C''(r) = \frac{4860\pi \cdot 2r}{r^4} + 180\pi \Longrightarrow C''(3) = 540\pi > 0$$

Por tanto, en $r = 3m$, $h = 9m$, hay un mínimo.

3. El coste del material será $C(3) = \dfrac{4860}{3} r + 90\pi 3^2 = 2430\pi\, euros.$

Problema 195 Determine los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a distancia mínima del punto $(4, 0)$.

Solución:

La función es $y^2 = 4x \Longleftrightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$, un punto genérico de la curva sería $(x, \pm 2\sqrt{x})$, cuya distancia al punto $(4, 0)$ será la función

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\pm 2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

Para minimizar esta función recurrimos a la primera derivada

$$d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada

$$d''(x) = \frac{12}{(x^2-4x+16)\sqrt{x^2-4x+16}} \Longrightarrow d''(2) = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

Luego se trata de un mínimo.

Para $x = 2$ tenemos que $y^2 = 4 \cdot 2 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$ luego los puntos buscados son $(2, 2\sqrt{2})$ y $(2, -2\sqrt{2})$.

Problema 196 A partir de una cartulina cuadrada de $60cm$ de lado se va a construir caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados elimininados tienen $10cm$ de lado. Decidir si la observación es correcta o no.

Solución:

Sea x la longitud del lado del cuadrado recortado, esto quiere decir que, la base de la caja es un cuadrado de lado $60 - 2x$ y la altura de la caja será x. El volumen de la caja será

$$V(x) = (60-2x)^2 \cdot x = (3600 + 4x^2 - 240x)x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

Para que este volumen sea máximo utilizamos la primera derivada

$$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600 = 0 \Longrightarrow x = 30, \ x = 10$$

Para comprobar cúal de estos valores es el máximo recurrimos a la segunda derivada

$$V''(x) = 24x - 480 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V''(30) = 240 > 0 \\ V''(10) = -240 < 0 \end{array} \right.$$

Luego cuando $x = 30$ el volumen es mínimo, mientras que cuando $x = 10$ el volumen es máximo y, por tanto, la observación es correcta.

Problema 197 Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

Solución:

Si el lado del primer cuadrado es x su perímetro es $4x$.
El perímetro del segundo cuadrado será $12x$, y su lado $3x$
El perímetro del tercer cuadrado será $4y$
La suma de los perímetros será $4x + 12x + 4y = 1248 \Longrightarrow y = 312 - 4x$ El área del primer cuadrado es x^2
El área del segundo cuadrado es $9x^2$
El área del tercer cuadrado es $y^2 = (312 - 4x)^2$
La función suma de áreas que hay que minimizar será

$$S(x) = x^2 + 9x^2 + (312 - 4x)^2 = 26x^2 - 2496x + 97344$$

Para calcular el mínimo derivamos

$$S'(x) = 52x - 2496 = 0 \Longrightarrow x = 48$$

Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada $S''(x) = 52 > 0 \Longrightarrow$ mínimo.

Las dimensiones de los campos son:

El primer campo tiene de lado $48m$
El segundo campo tiene de lado $144m$
El tercer campo tiene de lado $120m$

Problema 198 Representa gráficamente la curva $y = x + \dfrac{1}{x}$. Para ello calcula asíntotas, puntos criticos e intervalos de crecimiento.

Solución:

1. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:**

     $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$

     La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

   - **Asíntotas horizontales:**

     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} x + \frac{1}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$

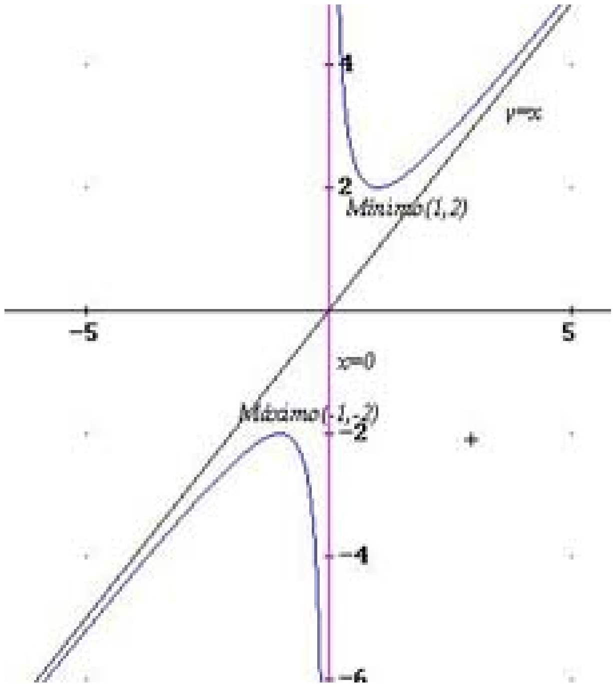
     Luego no hay asíntotas horizontales.

- **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} - x \right) = 0$$

Luego la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.



2. Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Que serían los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -2)$

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo, el estudio del signo se reduce al de $x^2-1 = (x-1)(x+1)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$	$-$	$+$
	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(-1, -2)$ la función tiene un máximo, pasa de crecinte a decreciente. En el punto $(1, 2)$ la función tiene un mínimo, pasa de decrecinte a creciente.

Problema 199 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

1. Calcular el dominio de f y puntos de corte si los hay.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Simetrías.
4. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
5. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos el los que se anule el denominador; $x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow Dom(f) = R$.

   - **cortes con el eje OX:** Para ello hacemos $f(x) = 0$

     $$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -1$$

     Luego los puntos de corte son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.
   - **cortes con el eje OY:** Para ello hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -1$, luego el punto de corte es $(0, -1)$.

2. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:** No hay ningún valor que anule el denominador de esta fracción y, por tanto, no tiene asíntotas verticales.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. **Simetrías:** Para buscar las simetrías calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$$

Luego la función es simétrica respecto al eje OY.

4. Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

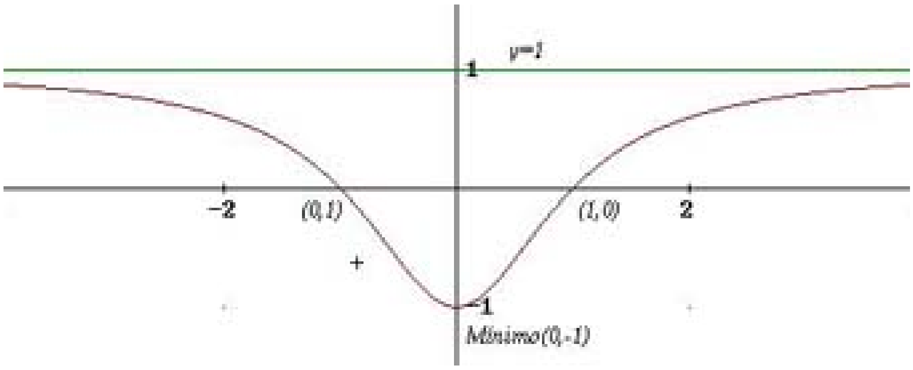
$$\Longrightarrow 4x = 0 \Longrightarrow x = 0, \; f(0) = -1$$

Sólo queda por decidir si el punto $(0, -1)$ es un máximo o un mínimo, lo cual se verá en el siguiente apartado.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $4x$, que es positivo cuando $x > 0$, y por el contrario, es negativo cuando $x < 0$. En conclusión:
Cuando $x < 0$ la función es decreciente.
Cuando $x > 0$ la función es creciente.
En el punto $(0, -1)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.



5. Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.

Problema 200 Resolver:

1. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.

2. Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución:

1. El dominio de $y = e^{x+2}$ y $y = e^{-x}$ es todo R y, por tanto, no tienen asíntotas verticales; además son continuas y positivas. Por otro lado tenemos:

   - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^{x+2} = e^{-\infty} = 0$
   - $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} e^{x+2} = e^{\infty} = \infty$
   - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^{-x} = e^{\infty} = \infty$
   - $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$

   Es decir, las dos funciones tienen una asíntota horizontal en común $y = 0$ y, por tanto, no tienen asíntotas oblicuas.

   Los puntos de corte entre estas dos funciones serán el resultado de resolver el sistema

   $$\left\{\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ y = e^{-x} \end{array}\right. \Longrightarrow (-1, e)$$

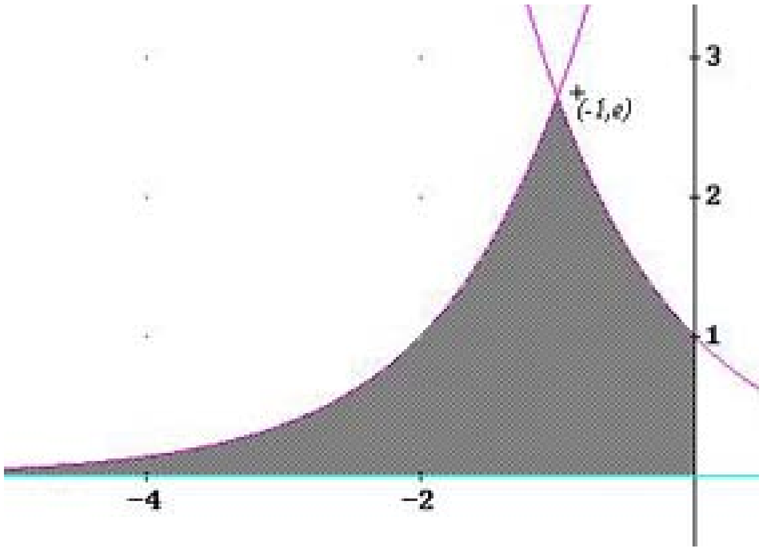
   Los puntos de corte entre la función $y = e^{x+2}$ y la función $x = 0$ será el resultado de resolver el sistema

   $$\left\{\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow (0, e^2)$$

Los puntos de corte entre la función $y = e^{-x}$ y la función $x = 0$ será el resultado de resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{-x} \\ x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow (0, 1)$$

El área pedida vendrá dada por



$$\int_{-\infty}^{-1} e^{x+2}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{x}\cdot e^{2}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx =$$

$$e^2\left[e^x\right]_{-\infty}^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} = e^2(e^{-1} - 0) + (-e^0 + e) = 2e - 1$$

Problema 201 Dada la función $f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$, se pide:

1. Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
2. Calcular el área encerrada entre la gráfica de $f(x)$ y el eje de abcisas.

Solución:

1.
   - **Dominio:** Será el formado por todos aquellos puntos que cumplan que $5 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f(x)) = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$.
   - **cortes con el eje OX:** Para ello hacemos $f(x) = 0$

$$x\sqrt{5 - x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ 5 - x^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 0,\ \ x = \sqrt{5},\ \ x = -\sqrt{5}$$

   Luego los puntos de corte son $(0, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$.

- **cortes con el eje OY:** Para ello hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$, luego el punto de corte es $(0, 0)$.
- **Simetrías:** Para buscar las simetrías calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{5-(-x)^2} = -f(x)$$

  Luego la función es simétrica respecto al origen O.
- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow 5-2x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)$$

  Sólo queda por decidir si estos puntos son máximos o mínimos, lo cual se verá en el siguiente apartado.
- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

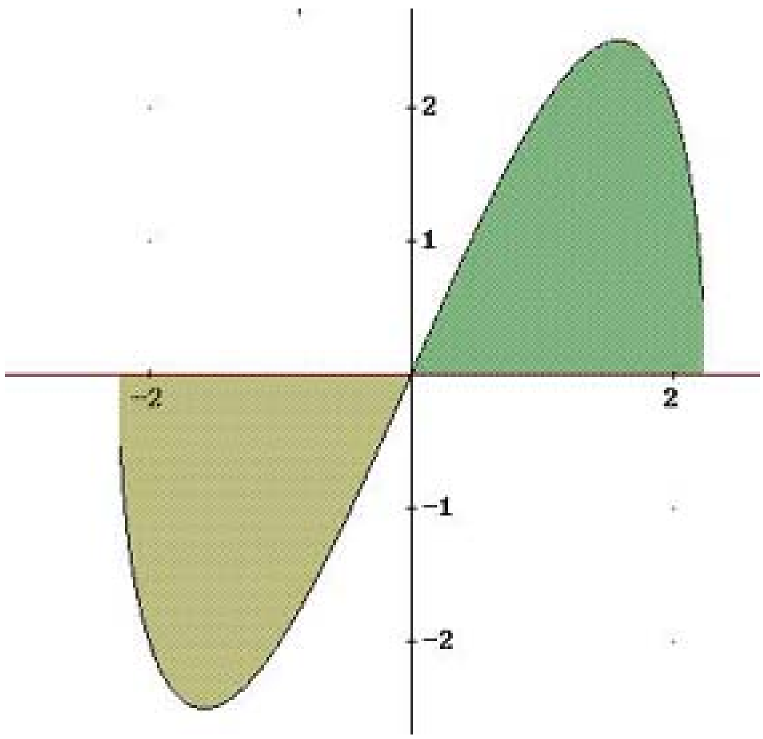
  Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el dominio de la función es $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$ y $f'(x)$ se anula en los puntos calculados en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right),\ \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right),$$

  En conclusión:
  Cuando $x \in \left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ la función es decreciente.
  Cuando $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ la función es creciente.
  Cuando $x \in \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right)$ la función es decreciente
  En el punto $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

  En el punto $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un máximo.

- Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.



2. Como la gráfica es simétrica respecto al origen el área buscada será el doble de la encerrada en el intervalo $[0, \sqrt{5}]$.

$$\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{5-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{5}} 2x\sqrt{5-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(5-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{125}}{3}$$

Podemos concluir: **Área**$= \dfrac{2\cdot\sqrt{125}}{3}\ u^2$

Problema 202 Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2-1$, $y = 11-x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.

Solución:

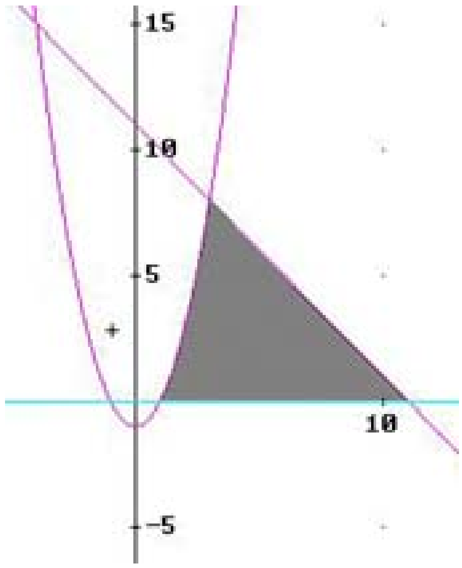
Calculamos los puntos de corte de estas funciones

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2-1 \\ y = 11-x \end{array}\right. \Longrightarrow x^2-1 = 11-x \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (3,8) \\ (-4,15) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1, 0) \\ (-1, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 11 - x \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 11 \Longrightarrow (11, 0)$$

El recinto pedido estará encerrado entre los puntos $(1, 0)$, $(3, 8)$ y $(11, 0)$.



Luego el área será:

$$A = \int_1^3 (x^2 - 1)\, dx + \int_3^{11} (11 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 + \left[11x - \frac{x^2}{2}\right]_3^{11}$$

Luego $A = \dfrac{116}{3}\ u^2$

Problema 203 Calcular $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}\, dx$

Solución:

Descomponemos el denominador en factores

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)$$

Empleamos el método de descomposición polinómica

$$\frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} =$$

$$\frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} \Longrightarrow$$

$$x+1=A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$$

Dando valores a x tenemos:

Si $x=0\Longrightarrow 1=-6A\Longrightarrow A=-\dfrac{1}{6}$

Si $x=2\Longrightarrow 3=10B\Longrightarrow B=\dfrac{3}{10}$

Si $x=-3\Longrightarrow -2=15C\Longrightarrow C=-\dfrac{2}{15}$

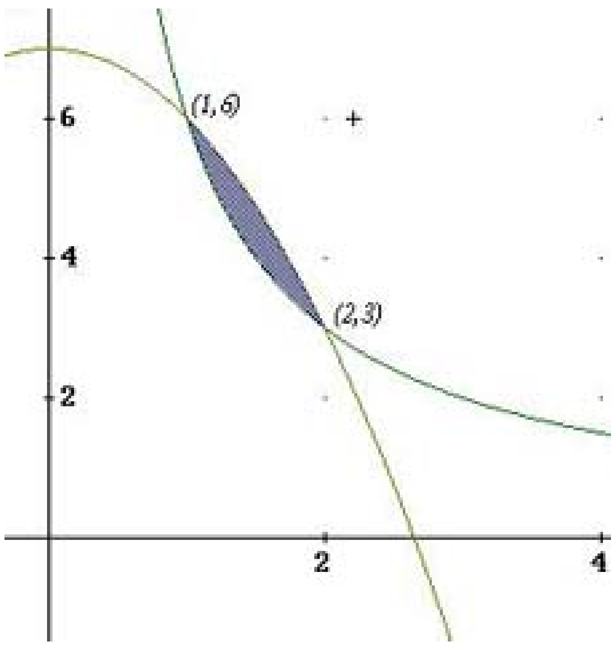
Sustituyendo estos valores en la integral tenemos

$$\int\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx=\int\frac{-1/6}{x}\,dx+\int\frac{3/10}{x-2}\,dx+\int\frac{-2/15}{x+3}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+K$$

Problema 204 Calcula el área que tiene el único recinto cerrado y limitado por las gráficas de las funciones $y=-x^2+7$ e $y=\dfrac{6}{x}$ (ver dibujo).

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones



$$\left\{\begin{array}{l} y=-x^2+7\\ y=\dfrac{6}{x}\end{array}\right.\Longrightarrow -x^2+7=\frac{6}{x}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ x=2\\ x=-3\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}(1,6)\\ (2,3)\\ (-3,-2)\end{array}\right.$$

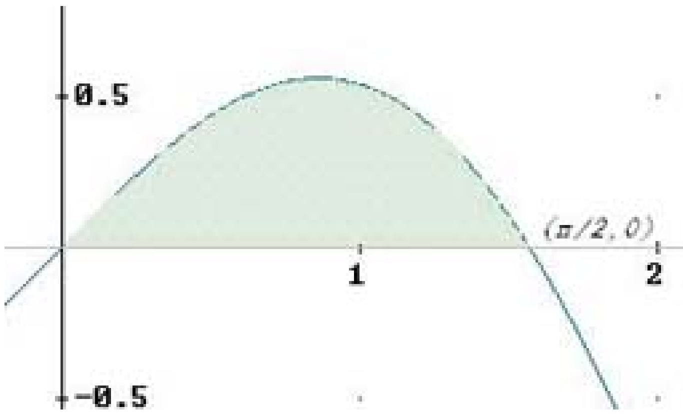
El recinto está comprendido entre los puntos $(1,6)$ y el $(2,3)$.

$$A=\int_1^2\left(-x^2+7-\frac{6}{x}\right)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+7x-6\ln|x|\right]_1^2=\frac{14}{3}-6\ln 2\ u^2$$

Problema 205 La gráfica de la curva $y=x\cos x$, cuando $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, y el eje OX limitan una superficie. Determinar el área de esa superficie.

Solución:

La función $y=x\cos x$ en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ es positiva, luego el área



que buscamos es

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\ dx$$

que vamos a resolver por partes

$$\left\{\begin{array}{l}u=x\\ dv=\cos x\,dx\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}du=dx\\ v=\sin x\end{array}\right.$$

$$\int x\cos x\ dx=x\sin x-\int\sin x\ dx=x\sin x+\cos x+C$$

Luego

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\ dx=[x\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1\ u^2$$

Problema 206 Calcular integrando por partes, el valor de:

$$\int_1^2 x^2\ln x\ dx$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^2\,dx \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array}\right.$$

$$\int x^2 \ln x\ dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{1}{3}x^2\ dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3$$

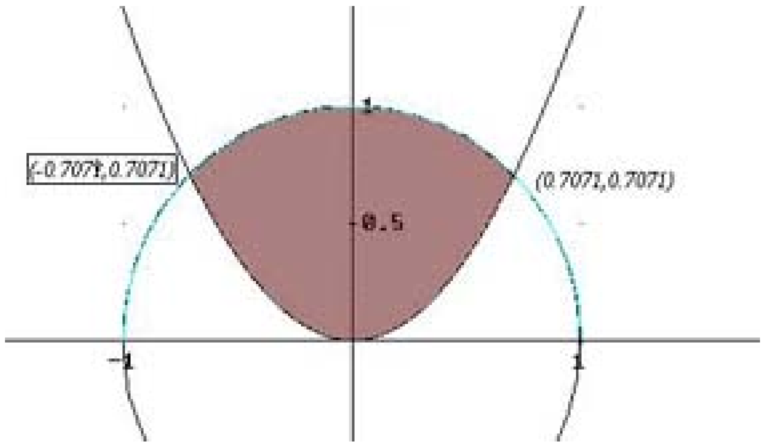
Luego

$$\int_1^2 x^2 \ln x\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$$

Problema 207 Calcular el área limitada por la parábola $y = \sqrt{2}\,x^2$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el eje OX (ver dibujo).

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones



$$\left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{2}\,x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow 2x^4 = 1 - x^2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Luego el punto buscado es $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$A = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\,x^2\ dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2}\ dx$$

Calculamos las dos integrales independientemente.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\, x^2\, dx = \left[\sqrt{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{6}$$

Para resolver la segunda integral hacemos un cambio de variable

$$x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t\; dt$$

Los nuevos límites de integración serán

Si $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin t \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

Si $x = 1 = \sin t \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$. Luego

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\; dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\; \cos t\; dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\; dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\; dt = \left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

El resultado final será:

$$A = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{12}$$

Problema 208 Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - \ln(x^2-1)$ y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y los extremos (máximos y mínimos relativos).

Solución:

- **Dominio:** Será el formado por todos aquellos puntos que cumplan que $x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow Dom(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2-1} = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Como $x = 1-\sqrt{2}$ no pertenece al dominio, resulta que el único extremo es $x = 1+\sqrt{2}$. Sólo queda por decidir si este punto es máximo o mínimo, lo cual se verá en el siguiente apartado.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{5 - 2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y $f'(x)$ se anula en los puntos calculados en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$(-\infty, -1)\,, \ \left(1, 1 + \sqrt{2}\right), \ \left(1 + \sqrt{2}, \infty\right),$$

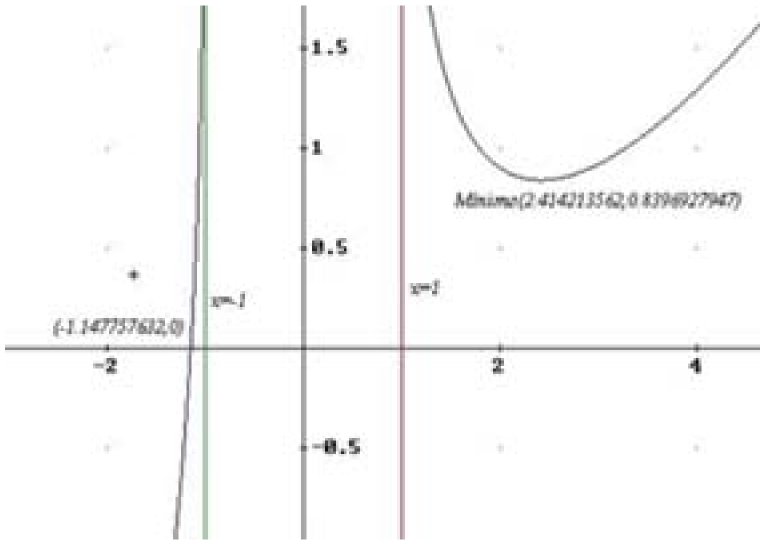
En conclusión:
Cuando $x \in (-\infty, -1)$ la función es creciente.
Cuando $x \in \left(1, 1 + \sqrt{2}\right)$ la función es decreciente.
Cuando $x \in \left(1 + \sqrt{2}, \infty\right)$ la función es creciente
En el punto $(1 + \sqrt{2}; 0.84)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

- **Concavidad:** Para ello calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \geq 0$$

Como la segunda derivada es siempre mayor que cero, la función es siempre cóncava.

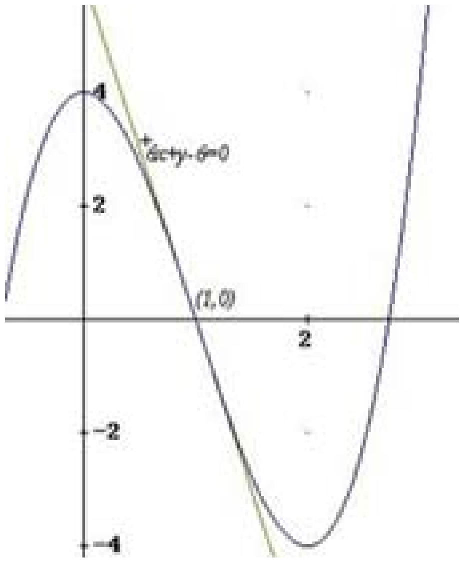
- Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.



Problema 209 Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva representativa de esta función en su punto de inflexión. Haga también su gráfica aproximada de la función en un entorno de ese punto.

Solución:

Para calcular el punto de inflexión tenemos que hacer $f''(x) = 0$.



$f'(x) = 6x^2 - 12x$

$f''(x) = 12x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 1$ posible punto de inflexión. $f'''(x) = 12 \neq 0 \Longrightarrow$ podemos asegurar que es de inflexión, que será el $(1,0)$. La pendiente de la recta tangente a esta función een este punto vale $m = f'(1) = -6$, luego la ecuación de la recta buscada es

$$y - 0 = -6(x - 1) \Longrightarrow 6x + y - 6 = 0$$

En un entorno de este punto la función pasará de cóncava a convexa o recíprocamente, habrá que ver también si en ese pequeño entorno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ la función es creciente.

	$(1-\varepsilon, 1)$	$(1, 1+\varepsilon)$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	decreciente	decreciente

	$(1-\varepsilon, 1)$	1	$(1, 1+\varepsilon)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	convexa	PI	cóncava

Con estos datos se puede dibujar la gráfica.

Problema 210 Calcular los siguientes límites (donde ”ln significa logaritmo neperiano).

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\dfrac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\dfrac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-3\sin(3x)\cos(2x)}{-2\sin(2x)\cos(3x)}$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3\cos(3x)\cos(2x)-2\sin(3x)\sin(2x)}{2\cos(2x)\cos(3x)-3\sin(2x)\sin(3x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

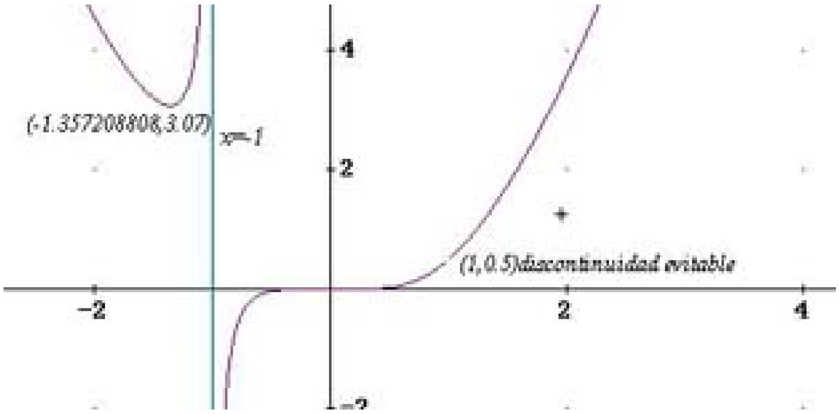
$$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\frac{1}{8}$$

Problema 211 Dada la función

$$f(x)=\frac{x^5-x^8}{1-x^6}$$

1. Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

2. Estudiar sin f tiene alguna asíntota vertical.



Solución:

1. Los puntos en los que f es discontinua es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $1 - x^6 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite en estos puntos

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^4(5 - 8x^3)}{-6x^5} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{5 - 8x^3}{-6x} = \frac{1}{2}$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = 1$ es evitable.

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = -1$ no es evitable.

2. Por lo visto en el apartado anterior $x = -1$ es una asíntota vertical.

Problema 212 .

1. Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

2. Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

3. Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Solución:

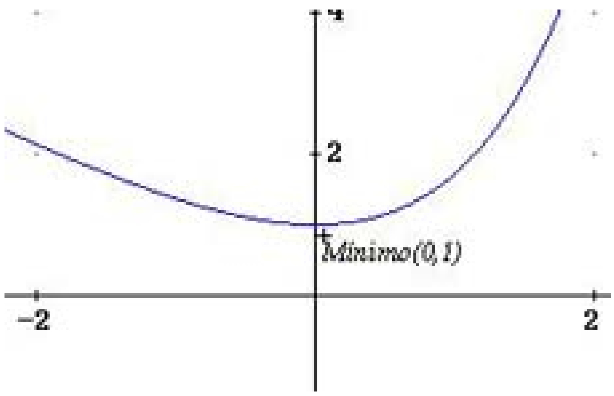
1. El dominio de $g(x) = e^x - x$ es todo R, calculamos los máximos y mínimos de esta función

$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$$

$$g''(x) = e^x \Longrightarrow g''(0) = 1 > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un mínimo.

Observando la segunda derivada, nos damos cuenta que $g''(x) = e^x > 0,\ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre cóncava hacia arriba $\bigcup$.



2.

$$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

Como el denominador de esta función no se anula nunca tenemos que el dominio de $f(x)$ es todo R.

Por otra parte, si calculamos los límites

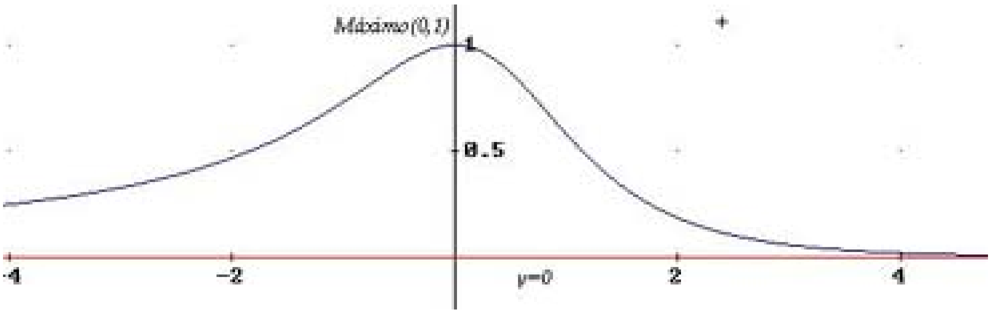
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

Se pueden valorar estos límites dándonos cuenta de que se puede despreciar e^x frente x cuando $x \longrightarrow -\infty$. Y por el contrario, se puede despreciar x frente a e^x cuando $x \longrightarrow \infty$.

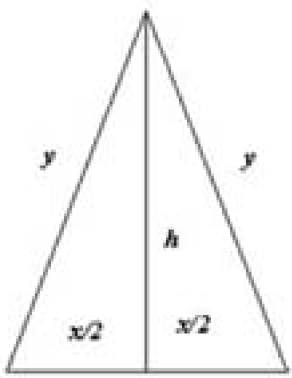
En conclusión, la recta $y = 0$ (el eje de abcisas) es una asíntota horizontal.

3.
$$f'(x) = \frac{1 - e^x}{(e^x - x)^3} = 0 \Longrightarrow 1 - e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$
$$f''(x) = \frac{e^{2x} + e^x(x-4) + 2}{(e^x - x)^3} \Longrightarrow f''(0) = -1 < 0$$
Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un máximo.



Problema 213 Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:



$$S = \frac{x \cdot y}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4-x}$$

$$S'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88+21x}{16(4-x)\sqrt{4-x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \frac{8}{3} \Longrightarrow y = \frac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Problema 214 Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

1. (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.
2. (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución:

1. (a) **Asíntotas:**
   - **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)
   - **Horizontales:**

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

   - **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

   (b) Extremos:

   $$f'(x) = \frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$x + 1/2, 08$	$-$	$+$	$+$
$x - 1/2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2},2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ la función tiene un mínimo.

2.

$$\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx =$$

$$= \int \left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+C$$

$$\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\Big]_0^1 = 1-\frac{1}{2}\ln 5$$

Problema 215 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 1-x^2$, se pide:

1. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

2. (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

3. (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0,1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

Solución:

1. Tenemos que calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)) = (a, 1-a^2)$. Calculamos la pendiente de esta recta

$$f'(x) = -2x \Longrightarrow m = f'(a) = -2a$$

La ecuación de la recta buscada será

$$y-(1-a^2) = -2a(x-a) \Longrightarrow 2ax+y-(1+a^2) = 0$$

2. **Corte con el eje OY:** Hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 1+a^2 \Longrightarrow A(0, 1+a^2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $y = 0 \Longrightarrow x = a+\dfrac{1-a^2}{2a} = \dfrac{a^2+1}{2a}$. Luego el punto buscado es $B\left(\dfrac{a^2+1}{2a}, 0\right)$.

3.

$$d(A,P) = \sqrt{(a-0)^2 + (1-a^2-(1+a^2))^2} = a\sqrt{1+4a^2}$$

$$d(B,P) = \sqrt{\left(a - \left(a + \frac{1-a^2}{2a}\right)\right)^2 + (1-a^2-0)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(1-a^2)^2}{4a^2} + (1-a^2)^2} = (1-a^2)\sqrt{\frac{1+4a^2}{4a^2}} = \frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2}$$

$$d(A,P) = 2d(B,P) \Longrightarrow a\sqrt{1+4a^2} = 2\frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2} \Longrightarrow$$

$$a = \frac{1-a^2}{a} \Longrightarrow a^2 = 1-a^2 \Longrightarrow 2a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $a \in (0,1)$ la solución pedida es la positiva $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 216 Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7)$$

1. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
2. Hallar los máximos y mínimos relativos de f.
3. ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

Solución:

1.

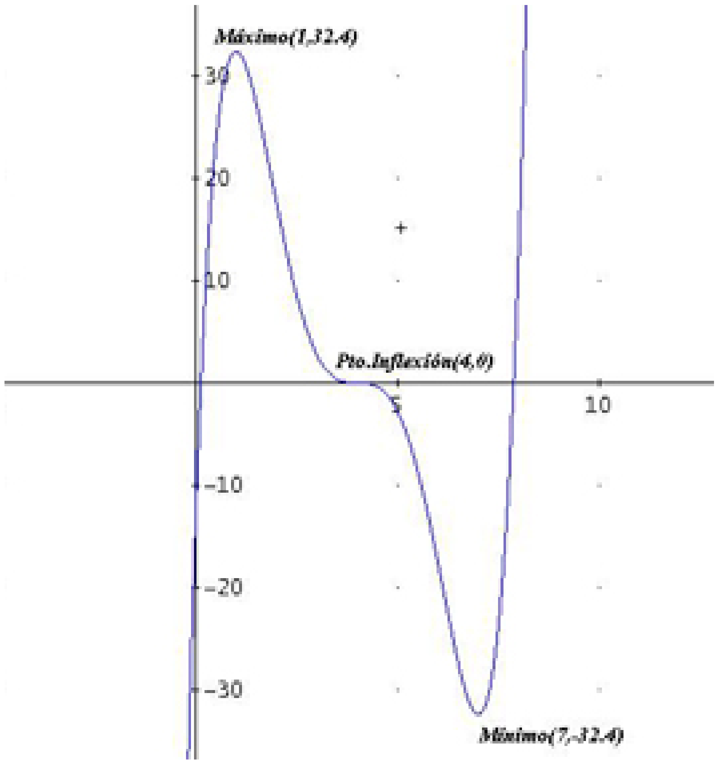
$$f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7) = 0 \Longrightarrow x = 4,\ \ x = 1,\ \ x = 7$$

Como $(x-4)^2 > 0$ solo tendremos que estudiar el signo de $x^2-8x+7 = (x-1)(x-7)$

	$(-\infty,1)$	$(1,7)$	$(7,\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Luego f crece en los intervalos $(-\infty,1)\cup(7,\infty)$, mientras que decrece en el intervalo $(1,7)$.

2. Por el apartado anterior observamos que en $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, por lo que podemos asegurar que estamos ante un Máximo en $\left(1, \dfrac{162}{5}\right)$; en el punto $x = 7$, por el contrario, la función pasa de decrecer a crecer, por lo que estamos ante un Mínimo en $\left(7, -\dfrac{162}{5}\right)$. En $x = 4$ la función pasa de decrecer a decrecer y, por tanto, en el punto $(4, 0)$ no hay ni Máximo ni Mínimo.



3. Para que en $x = 4$ exista un punto de inflexión la función debe de cambiar de cóncava a convexa o viceversa. Para comprobarlo calculamos la segunda derivada

   $f''(x) = 2(x-4)(2x^2-16x+23) = 0 \Longrightarrow x = 4, \;\; x = 1,8787, \;\; x = 6,1213$

   Serían los posibles puntos de inflexión. En el intervalo $(1,8787; 4)$ $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es convexa, mientras que en el intervalo $(4; 6,1213)$ $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava. Por tanto, podemos asegurar que la función f tiene un punto de inflexión en $(4, 0)$. Otra manera de comprobarlo es através de la tercera derivada:

   $$f'''(x) = 6(2x^2 - 16x + 29) \Longrightarrow f'''(4) = -18 \neq 0$$

   Luego se trata de un punto de inflexión.

Problema 217 Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

1. Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

2. Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abcisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

3. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Solución:

1. **Máximos y Mínimos relativos:** $f'(x) = -\dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = -1,\ x = 0$. El denominador no se anula nunca, y es siempre positivo.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$-x$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

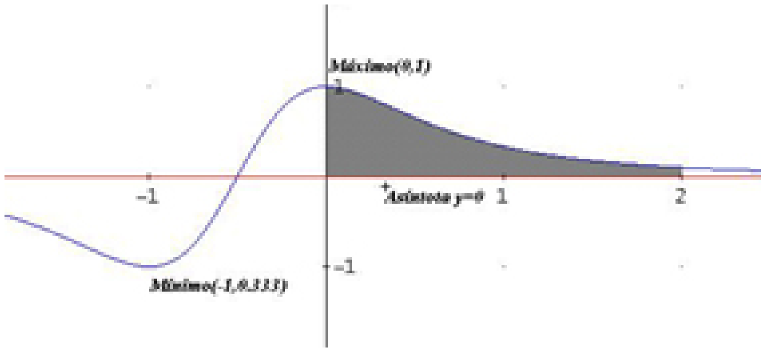
En $x = -1$ la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un Mínimo en el punto $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$. En $x = 0$ la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un Máximo en el punto $(0, 1)$.
Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, ya que el denominador no se anula nunca.

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.



2.

3.

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+x+1}\bigg]_0^2 = \frac{6}{7}$$

Problema 218 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1)=0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

Solución:

Hacemos $u = 2x$ y $dv = f'(x)dx \Longrightarrow du = 2dx$ y $v = f(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^1 xf'(x)dx = 2xf(x)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1-2xf(x)}{2}\bigg]_0^1 = -\frac{1-2f(1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Problema 219 *(2 puntos)* Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x=1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0,1)$.
- se verifica que

$$\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$$

Solución:

- $$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow p'(1) = 3a + 2b + c = 0$$

- $$p''(x) = 6ax + 2b \Longrightarrow p''(0) = 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$$

$$p(0) = d = 1$$

- $$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)dx = \left.\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = \frac{5}{4}$$

En conclusión, tenemos

$$\frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{5}{4} \Longrightarrow a + 2c = 1, \quad \text{y} \quad 3a + c = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{5}, \quad c = \frac{3}{5} \Longrightarrow p(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$$

Problema 220 *(3 puntos)* Calcular los siguientes límites

1. (1,5 puntos)
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$$

2. (1,5 puntos)
$$\lim_{x\longrightarrow 0} x\left[\arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = [\infty - \infty] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x^2e^x}{1+e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2xe^x-x^2e^x}{2e^{2x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x-x^2}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2-2x}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2}{2e^x}=0$$