Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Octubre 2004

Problema 1 *(2 puntos)*Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Resolver la ecuación matricial $XA - B = XC$.
2. Calcular la matriz X

Solución:

1. $XA - B = XC \Longrightarrow XA - XC = B \Longrightarrow X(A - C) = B \Longrightarrow$

   $X(A - C)(A - C)^{-1} = B(A - C)^{-1} \Longrightarrow X = B(A - C)^{-1}$.

2. $A - C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   $(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

   $X = B(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)*Determinar para que valores de m tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

y hállala para $m = 2$.

Solución:

Una matriz A tienen inversa siempre que $|A| \neq 0$, luego

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3 = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = -1$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1 y -1.

Si $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/9 & -2/9 & 4/9 \\ 4/3 & 2/3 & -1/3 \\ -8/9 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)*Calcule mediante transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, este determinante:

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix} = [C_1 : C_1{+}C_2{+}C_3] = \begin{vmatrix} 2+a+b+c & b & c \\ 2+a+b+c & 2+b & c \\ 2+a+b+c & b & 2+c \end{vmatrix} =$$

$$= (2{+}a{+}b{+}c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 2+b & c \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} = [F_2 : F_2{-}F_1] = (2{+}a{+}b{+}c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & 2+c \end{vmatrix} = 4(2+a+b+c)$$

Problema 4 *(2 puntos)*Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sea n un número natural cualquiera. Determinar el valor de A^n para cada n y halla $A^{350} - A^{250}$.

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdots A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{350} - A^{250} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 5 *(2 puntos)*Resolver los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{3x}$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^3 - 1}\right)^{x^2}$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x^4 - 1}{3x^4 + x + 1}\right)^{3x^4}$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2x}{\sqrt{3x+1} - 1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}}}{3} = -\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^3+2x-1}{x^3-1}\right)^{x^2} = (1^\infty) = e^\lambda = e^2$

   $\lambda = \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} x^2\left(\dfrac{x^3+2x-1}{x^3-1} - 1\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{2x^3}{x^3-1} = 2$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x^4-1}{3x^4+x+1}\right)^{3x^4} = (1^\infty) = e^\lambda = e^{-\infty} = 0$

   $\lambda = \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} 3x^4\left(\dfrac{3x^4-1}{3x^4+x+1} - 1\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{-3x^5-6x^4}{3x^4+x+1} = -\infty$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2x}{\sqrt{3x+1}-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2}{\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} = \dfrac{4}{3}$