Problemas de Álgebra (Matemáticas 2º)

Problema 1 Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (F_1 \longrightarrow F_1 + F_2 + F_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \longrightarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \longrightarrow C_3 - C_1 \end{pmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Problema 2 Calcula el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \longrightarrow F_4 - F_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^3 \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (C_1 \longrightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4) = (x-a)^3 \begin{vmatrix} x-3a & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)^3(x-3a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^3(x-3a)$$

Problema 3 Halla en función de a, el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (F_1 \longrightarrow F_1 + F_2) = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)(a^3-1)$$

Problema 4 Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \longrightarrow F_4 - F_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= (F_3 \longrightarrow F_3 - F_2) = a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} =$$

$$= a(b-a)(d-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Problema 5 Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \longrightarrow C_1 - xC_2 \\ C_4 \longrightarrow C_4 - C_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-x^2 & -x & 1 & x \\ x & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-x^2 & 1 & x \\ x & -x & 0 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 \begin{vmatrix} 1-x^2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (C_1 \longrightarrow C_1 + C_2) =$$

$$= -x^2 \begin{vmatrix} 2-x^2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x^2 \begin{vmatrix} 2-x^2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = x^2(x^2-4) = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 0, \;\; x = 2, \;\; x = -2$$

Problema 6 Calcula el valor de este determinante, dando el resultado factorizado:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \longrightarrow C_1 - aC_2 \\ C_4 \longrightarrow C_4 - C_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a & 1 & -a \\ -a & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-a^2 & 1 & -a \\ -a & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1-a^2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (F_1 \longrightarrow F_1 + F_3) =$$

$$= a \begin{vmatrix} 2-a^2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 2-a^2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2(a^2-4)$$

Problema 7 Halla, en función de a, el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1 \end{array} \right) = \begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & -a^2+1 & a^2-a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 \\ -a^2+1 & a^2-a \end{vmatrix} = (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -1 & a^2-a \end{vmatrix} = (a^2-1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)(a+1)(a-1) = (a^2-1)^2$$

Problema 8 Estudia el rango de esta matriz, según los valores de t:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(M) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Longrightarrow Rango(M) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{vmatrix} = t^2 + 4t - 12 = 0 \Longrightarrow t = -6,\ t = 2$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2t + 2t = 0$$

3.
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & t & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$$

4.

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ t & 4 & 0 \\ 3 & t & -2 \end{vmatrix} = 2(t^2 - 4t - 12) = 0 \Longrightarrow t = -6,\ \ t = 2$$

En conclusión:

Si $t = -6$ o $t = 2$, los cuatro determinantes son cero $\Longrightarrow$ $Rango(M) = 2$.

Si $t \neq -6$ y $t \neq 2$, alguno de los cuatro determinantes es distinto de cero y, por tanto, $Rango(M) = 3$.

Problema 9 Determina cuál es el rango de la matriz A, según los valores de λ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda + 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(A) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de λ que los anulan son los siguientes:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda + 1 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = -\lambda(2 - \lambda^2 - \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = -2$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 2$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda + 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2(2-\lambda^2-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -2,\ \lambda = 1$$

En conclusión, como no hay ningún valor de λ que anule los cuatro determinantes a la vez $\Longrightarrow Rango(A) = 3$

Problema 10 Estudia el rango de la matriz M según los valores de t:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(M) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow Rango(M) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & t & 3 \\ 1 & 8-3t & 3 \end{vmatrix} = 0$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 8-3t & -2 \end{vmatrix} = 0$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ t & 3 & 2 \\ 8-3t & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

En conclusión, los cuatro determinantes son cero sea cual sea el valor de t, luego $Rango(M) = 2$.

Problema 11 Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(M) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow Rango(M) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 2a & 5 \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = -1$$

2. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 2a & a \end{vmatrix} = a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = -1,\ a = 2$$

3. $$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 2(a^2 - 4a + 3) = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = 3$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 2a & 5 & a \end{vmatrix} = -3a^2 + 8a - 5 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = \frac{5}{3}$$

En conclusión:

Si $a = 1$ los cuatro determinantes son cero $\Longrightarrow Rango(M) = 2$.

Si $a \neq 1$ alguno de los cuatro determinantes es distinto de cero y, por tanto, $Rango(M) = 3$.

Problema 12 Determina el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & -3 & 0 \\ 4 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(A) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a + 3 = 0 \Longrightarrow a = -3, \ a = -1$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4.
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & -3 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

En conclusión:

Si $a = -3$ o $a = -1$ los cuatro determinantes son cero $\Longrightarrow Rango(M) = 2$.

Si $a \neq -3$ y $a \neq -1$ alguno de los cuatro determinantes es distinto de cero y, por tanto, $Rango(M) = 3$.

Problema 13 Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$$

Para los casos en los que $a = 2$ y $a = 0$.

Solución:

Para que A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|A| = -a = 0$. Es decir, la matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 0$.

- Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 0$ no tiene inversa.

Problema 14 Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla los valores de x para los cuales la matriz M no es inversible. Hallar la inversa de M para $x = 2$.

Solución:

Para que M tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|M| = 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ x = -1$. Es decir, la matriz M tiene inversa siempre que $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

Para $x = 2$ tendremos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \frac{Adj(M^T)}{|M|} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & -2/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 15 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra los valores de a para los que la matriz no es inversible.
2. Calcula A^{-1} para $a = 2$

Solución:

1. Para que A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|A| = (a-1)(3a-2) = 0$. Es decir, la matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 1$ y $a \neq \dfrac{2}{3}$.
2. Para $a = 2$ tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Problema 16 Halla X tal que $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Tenemos que calcular A^{-1} y multiplicar este resultado por B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3/5 & 1/5 & 6/5 \\ 2/5 & 1/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3/5 & 1/5 & 6/5 \\ 2/5 & 1/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 17 Halla X tal que $AX + B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX + B = 0 \Longrightarrow AX = -B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \Longrightarrow X = A^{-1}(-B)$$

Tenemos que calcular A^{-1} y multiplicar este resultado por $-B$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -0\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & 1/2\\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & 1/2\\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 4 & 4\\ -4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 18 Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2\\ 2 & \lambda & -1\\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra los valores de λ para los que la matriz no es inversible.

2. Calcula A^{-1} para $\lambda=2$ y $\lambda=0$

Solución:

1. Para que A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|A|=3\lambda^2+6\lambda+3=3(\lambda+1)^2=0$. Es decir, la matriz A tiene inversa siempre que $\lambda\neq -1$.

2. Para $\lambda=2$ tendremos:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}=\begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & -1/9\\ -1/9 & 2/9 & 2/9\\ 2/9 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda=0$ tendremos:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}=\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3\\ -1 & 2/3 & 4/3\\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 19 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} -x+ & 2y- & z= & 1\\ 3x- & y+ & 2z= & -4\\ x- & y+ & z= & -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ -4\\ -1 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 20 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} 2x+ & 3y+ & z = & 7 \\ x+ & y- & 2z = & 5 \\ & y+ & 2z = & 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 & -7/3 \\ -2/3 & 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 & -7/3 \\ -2/3 & 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 21 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} 4x+ & 2y- & z = & 6 \\ x+ & & z = & 1 \\ 2x+ & y+ & z = & 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right)$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \left(\begin{array}{rrr} 1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & -2 & 5/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{array} \right)$$

Calculamos X:

$$X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{rrr} 1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & -2 & 5/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 6 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 22 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} -3x+ & y- & z = & 5 \\ x+ & 2y+ & z = & 0 \\ 2x+ & & z = & 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right)$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -11 \\ 41 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = -19 \\ y = -11 \\ z = 41 \end{cases}$$

Problema 23 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} x- & y+ & z = & 6 \\ 2x- & y+ & z = & 8 \\ x- & 2y+ & z = & 7 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Problema 24 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x- & y+ & 3z = & 1 \\ -x+ & y- & z = & 2 \\ x+ & y+ & 3z = & 3 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$. Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 25 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & y- & z = & 3 \\ -x+ & 2y- & z = & 1 \\ 2x- & y+ & z = & 2 \\ -x+ & 5y- & 5z = & 5 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 3$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

Problema 26 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x- & 4y & +z = & 1 \\ -x+ & 2y & -z = & 3 \\ x- & & z = & 7 \\ x- & y & = & 2 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, de $3 - 2 = 1$ grados de libertad.

Problema 27 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y = & 3 \\ -x+ & 3y = & -1 \\ -x+ & 6z = & 2 \\ x- & y = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 28 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 3y+ & z = & 1 \\ x+ & y- & z = & 0 \\ 3x- & 2y & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1+2t}{5} \\ \\ y = \dfrac{-1+3t}{5} \\ \\ z = t \end{array}\right.$$

Problema 29 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 4 \\ 2x- & 3y+ & z = & -1 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 3$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) =$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{17}{15} \\ \\ y = \dfrac{23}{15} \\ \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

Problema 30 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x- & y+ & z = & 2 \\ x- & 2y- & z = & -1 \\ 2x+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 3$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) =$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{9} \\ \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ \\ z = \dfrac{14}{9} \end{array}\right.$$

Problema 31 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & y+ & 2z = & 1 \\ x+ & y+ & z = & 2 \\ 2x- & 2y+ & z = & -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3-3t}{4} \\ \\ y = \dfrac{5-t}{4} \\ \\ z = t \end{array}\right.$$

Problema 32 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y- & z = & 0 \\ 2x+ & 2y+ & z = & -1 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 33 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & 4y- & z = & 1 \\ x- & y- & z = & -2 \\ 4x+ & 3y- & 2z = & -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{-7+5t}{7} \\ \\ y = \dfrac{7-2t}{7} \\ \\ z = t \end{array}\right.$$

Problema 34 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y- & z = & 2 \\ x+ & 2y- & 3z = & 1 \\ 4x+ & 4y- & 4z = & 7 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 35 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 5x- & 2y+ & 3z= & 5 \\ x+ & y+ & z= & 2 \\ 4x- & 3y+ & 2z= & 3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{9-5t}{7} \\ \\ y=\dfrac{5-2t}{7} \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 36 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 5x+ & y+ & z= & 4 \\ -x+ & y- & 3z= & -2 \\ 2x+ & y- & z= & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3-2t}{3} \\ \\ y=\dfrac{-3+7t}{3} \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 37 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x- & y+ & 3z = & 2 \\ x- & y- & 2z = & -1 \\ 6x- & 3y- & z = & 0 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3 - 5t}{3} \\ \\ y = \dfrac{6 - 11t}{3} \\ \\ z = t \end{cases}$$

Problema 38 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+ & y- & z = & 2 \\ x+ & y+ & z = & 2 \\ 3x+ & 2y & = & 1 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 39 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x+ & 5y- & 3z = & 2 \\ x+ & 3y+ & z = & 2 \\ x- & y+ & 3z = & -1 \end{cases}$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=3$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})=$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ \\ y=\dfrac{1}{2} \\ \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Problema 40 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 7x- & 3y- & 2z= & -1 \\ 2x+ & y- & 3z= & 3 \\ 5x- & 4y+ & z= & -4 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 7 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{8+11t}{13} \\ \\ y=\dfrac{23+17t}{13} \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 41 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 2y+ & 5z= & 3 \\ x+ & y- & z= & -1 \\ x- & 3y+ & 6z= & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 42 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x- & y+ & 2z- & t = & 3 \\ 2x+ & y- & z+ & t = & 2 \\ -x+ & y+ & z- & t = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 3$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, de $4 - 3 = 1$ grados de libertad.

Problema 43 Discute si el sistema siguiente es compatible, y en caso afirmativo encuentra las soluciones.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & -1 \\ x- & y+ & 2z = & 1 \\ x+ & 5y- & z = & -5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$

Luego $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, luego las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes, y podemos despreciar la última.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +y+ & z & =-1 \\ x & -y+ & 2z & =1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x & +y = & -1-z \\ x & -y = & 1-2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & -\dfrac{3t}{2} \\ & \\ y = & \dfrac{-2+t}{2} \\ & \\ z = & t \end{array}\right.$$

Problema 44 Discute si el sistema siguiente es compatible, y en caso afirmativo encuentra las soluciones.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2y+ & z = & 2 \\ x+ & y- & z = & 1 \\ 7x- & 3y+ & z = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2y+ & z = & 2 \\ x+ & y- & z = & 1 \\ 7x- & 3y+ & z = & 5 \end{array}\right. \overset{(E_2 \longrightarrow E_1)}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 3x- & 2y+ & z = & 2 \\ 7x- & 3y+ & z = & 5 \end{array}\right. \overset{\substack{(E_2-3E_1) \\ (E_3-7E_1)}}{\longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ & -5y+ & 4z = & -1 \\ & -10y+ & 8z = & -2 \end{array}\right. \overset{(E_3-2E_2)}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ & -5y+ & 4z = & -1 \\ & & 0 = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

El sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Vamos a calcularlas:
Despejando y en E_2 y haciendo $z = \lambda$

$$y = \frac{-1-4z}{-5} = \frac{1+4z}{5} = \frac{1+4\lambda}{5}$$

Sustituyendo estos valores en E_1

$$x + \frac{1+4\lambda}{5} - \lambda = 1 \Longrightarrow x = \frac{\lambda+1}{5}$$

La solución pedida sería:

$$\left\{\begin{array}{rc} x = & \frac{\lambda+4}{5} \\ y = & \frac{4\lambda+1}{5} \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 45 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.

$$\begin{cases} -x+ & 4y = & -6 \\ 2x- & 3y = & 7 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x- & 2y+ & z = & -3 \\ 2x+ & 3y- & z = & 3 \\ x- & y+ & 3z = & 6 \end{cases}$$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = -1$$

2.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 17$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = -\frac{15}{17}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{45}{17}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{54}{17}$$

Problema 46 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.

$$\begin{cases} -x+ & 3y = & -5 \\ x+ & y = & 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x+ & 2y- & z = & 0 \\ x- & 3y+ & z = & -3 \\ 2x+ & y- & z = & 1 \end{cases}$$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = -1$$

2.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{14}{3}$$

Problema 47 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.

$$\left\{ \begin{array}{rrr} -3x+ & 2y = & 3 \\ 2x- & y = & -1 \end{array} \right.$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x- & y- & z = & 0 \\ -x+ & 2y+ & z = & 1 \\ x- & 3y- & 2z = & -3 \end{array} \right.$$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) =$nº de incógnitas$= 2$, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -1$$

$$x = \frac{\left| \begin{array}{rr} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{array} \right|}{-1} = 1 \quad y = \frac{\left| \begin{array}{rr} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{array} \right|}{-1} = 3$$

2.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) =$nº de incógnitas$= 3$, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -2$$

$$x = \frac{\left| \begin{array}{rrr} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{array} \right|}{-2} = 1$$

$$y = \frac{\left| \begin{array}{rrr} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{array} \right|}{-2} = 0$$

$$z = \frac{\left| \begin{array}{rrr} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{array} \right|}{-2} = 2$$

Problema 48 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.
$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x- & y= & 0\\ 3x+ & y= & 5 \end{array}\right.$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 2\\ -x+ & 2y+ & z= & 4\\ 3x+ & y+ & z= & 6 \end{array}\right.$$

Solución:

1.
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 5$$

$$x=\frac{\left|\begin{array}{rr} 0 & -1\\ 5 & -1 \end{array}\right|}{5}=1 \quad y=\frac{\left|\begin{array}{rr} 2 & 0\\ 3 & 5 \end{array}\right|}{5}=2$$

2.
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 1 & 4\\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 12$$

$$x=\frac{\left|\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 1\\ 6 & 1 & 1 \end{array}\right|}{12}=1$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right|}{12}=2$$

$$z=\frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 6 \end{array}\right|}{12}=1$$

Problema 49 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 2y = & -5 \\ 5x+ & y = & 1 \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & z = & 1 \\ -3x+ & y+ & z = & -5 \\ x- & y+ & 3z = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -7$$

$$x = \frac{\left|\begin{array}{rr} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right|}{-7} = 1 \quad y = \frac{\left|\begin{array}{rr} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{array}\right|}{-7} = -4$$

2.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 22$$

$$x = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{array}\right|}{22} = 2$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{array}\right|}{22} = 0$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right|}{22} = 1$$

Problema 50 Discute, y resuelve cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y & & = a \\ (a+1)x+ & 2y & +z = & a+3 \\ & 2y & +z = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a \\ a+1 & 2 & 1 & a+3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de a que anulan el determinante de A. $|A| = -a - 1 = 0 \Longrightarrow a = -1$.

Luego si $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $a = -1$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

El $Rango(\overline{A}) = 2$ (tiene dos filas iguales)

Tenemos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

En conclusión:

Si $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado.

Si $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

Problema 51 Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ. Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} \lambda x+ & & & 2z = & 0 \\ & (\lambda-2)y & + & z = & 0 \\ (\lambda-1)x+ & y & - & z = & 0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de λ que anulan el determinante de A. $|A| = (1-\lambda)(3\lambda-4) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = \dfrac{4}{3}$.

Luego si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq \dfrac{4}{3} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 3 =$n^o de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado, la solución sería la trivial: $x = y = z = 0$.

Si $\lambda = 1$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Tenemos que $Rango(A) = 2 <$n^o de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido tenemos el sistema $\left\{ \begin{array}{rrr} x & + & 2z = 0 \\ & -y+ & z = 0 \end{array} \right.$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{array} \right.$$

Si $\lambda = \dfrac{4}{3}$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{vmatrix} = -\dfrac{8}{9} \neq 0$

Tenemos que $Rango(A) = 2 <$n^o de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido tenemos el sistema $\left\{ \begin{array}{rrr} 4/3x & + & 2z = 0 \\ & -2/3y+ & z = 0 \end{array} \right.$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}t \\ y = \dfrac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

Problema 52 Discutir el sistema

$$\begin{cases} ax & -y & +z & = 0 \\ x & +y & +az & = 3 \\ -x & +y & & = 1 \end{cases}$$

según los valores del parámetro a. Resolverlo en los casos en que admita infinitas soluciones.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de a que anulan el determinante de A. $|A| = -a^2 + a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1$ y $a = 2$.

Luego si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$n^o de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $a = -1$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ y $|A| = 0$

El $Rango(\overline{A}) = 3$

Tenemos que $Rango(A) \neq Rango(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ y $|A| = 0$

El $Rango(\overline{A}) = 2$

Tenemos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Resolvemos en este último caso:

Por el menor escogido sabemos que las ecuaciones primera y segunda son linealmente independientes, luego podemos despreciar la tercera.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x & -y+ & z & = 0 \\ x & +y+ & 2z & = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} 2x & -y = & -z \\ x & +y = & 3-2z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1-t \\ y = & 2-t \\ z = & t \end{array} \right.$$

Problema 53 Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} (1+\lambda)x+ & y+ & z = & 1 \\ x+ & (1+\lambda)y+ & z = & \lambda \\ x+ & y+ & (1+\lambda)z = & \lambda^2 \end{array} \right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} (1+\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (1+\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (1+\lambda) \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} (1+\lambda) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1+\lambda) & 1 & \lambda \\ -1 & 1 & (1+\lambda) & \lambda^2 \end{array} \right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de λ que anulan el determinante de A. $|A| = \lambda^2(\lambda + 3) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ y $\lambda = -3$.

Luego si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = -3$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array} \right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ y $|A| = 0$

El $Rango(\overline{A}) = 3$

Tenemos que $Rango(A) \neq Rango(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 0$ tendremos

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

El $Rango(A) = 1$, las tres filas son iguales.

El $Rango(\overline{A}) = 2$

Tenemos que $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$, luego el sistema es incompatible.

Problema 54 Discute y resuelve el siguiente sistema, según los valores del parámetro m:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} mx+ & y & + & z = 2 \\ x+ & my & & = 1 \\ x+ & my & + & mz = 1 \end{array} \right.$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 0 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \end{array} \right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de m que anulan el determinante de A. $|A| = m(m^2 - 1) = 0 \Longrightarrow m = 0$, $m = 1$ y $m = -1$.

Luego si $m \neq 0, 1, -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $m = 0$ tendremos

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -1 \neq 0$

El $Rango(\overline{A}) = 2$ (tiene dos filas iguales)

Tenemos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido tenemos el sistema $\left\{\begin{array}{rrl} & y+ & z=2 \\ x & & =1 \end{array}\right.$ y haciendo $z=t$ nos queda la solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2-t \\ z=t \end{array}\right.$$

Si $m=1$ tendremos

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A)=2\neq Rango(\overline{A})=3\Longrightarrow$, luego el sistema es incompatible.
Si $m=-1$ tendremos

$$A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A)=2\neq Rango(\overline{A})=3\Longrightarrow$, luego el sistema es incompatible.
En conclusión:

Si $m=0$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $m=1$ el sistema es incompatible.

Si $m=-1$ el sistema es incompatible.

Si $m\neq 0$, $m\neq 1$ y $m\neq -1$ el sistema es compatible determinado.

Problema 55 Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} \lambda x- & y+ & 2z= & 0 \\ -x+ & \lambda y+ & 2z= & 0 \\ 2x+ & \lambda y- & z= & 0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A|=0$ para calcular los valores de λ que anulan el determinante de A. $|A|=-3(\lambda+1)^2=0\Longrightarrow\lambda=-1$.

Luego si $\lambda\neq-1\Longrightarrow|A|\neq 0\Longrightarrow Rango(A)=3=n^{\text{o}}$ de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado, la solución sería la trivial: $x = y = z = 0$.

Si $\lambda = -1$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Tenemos que $Rango(A) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Cogemos las dos últimas filas, a la vista del menor elegido anteriormente.

$\begin{cases} -x- & y+ & 2z = 0 \\ 2x- & y- & z = 0 \end{cases}$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Problema 56 Discute el siguiente sistema, y resuélvelo cuando sea posible, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} & y & + & az = & 1 \\ x+ & & & a^2z = & 2a+1 \\ x- & y & + & a(a-1)z = & 2a \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a(a-1) & 2a \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de m que anulan el determinante de A.

Resulta que $|A| = 0$ siempre e independientemente del valor que tome a.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ resulta que $Rango(A) = 2$ sea cual sea el valor que tome a.

Ahora estudiamos el $Rango(\overline{A})$:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = 0$ Para cualquier valor de a.

$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & a(a-1) & 2a) \end{vmatrix} = 0$ Para cualquier valor de a.

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a+1 \\ -1 & a(a-1) & 2a) \end{vmatrix} = 0$ Para cualquier valor de a.

Luego $Rango(\overline{A}) = 2$ independientemente del valor de a.

En conclusión:

$Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas y por tanto el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a.

Por el menor escogido podemos despreciar la tercera ecuación y nos quedaría el sistema

$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & az = & 1 \\ x & + & a^2z = & 2a+1 \end{array}\right.$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2a+1-a^2t \\ y = 1-at \\ z = t \end{array}\right.$$

Problema 57 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 0 \\ & ay+ & 2z = & 4 \\ & 2y+ & az = & 4 \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 4 \\ 0 & 2 & a & 4 \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$

- Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow$ Rango(A) $= 3 =$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.

- Para $a = -2:\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A| = 0$ y además hay un menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ y por tanto, el Rango$(A) = 2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16 \neq 0 \text{ y el Rango}(\overline{A}) = 3.$$

  Concluyendo:
  Rango$(A) = 2 \neq$ Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

- Para $a = 2:\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$

  Sabemos que $|A| = 0$, luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$$

  En la matriz ampliada $\overline{A}$ vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

  Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$\overline{A}$ $<$n^{o} de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

  Vamos a resolverlo:

  Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la tercera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 0 \\ & 2y+ & 2z= & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 0 \\ & y+ & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y= & & -z \\ & y= & 2 & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rc} x= & 2(1-\lambda) \\ y= & 2-\lambda \\ z= & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 58 Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.

2. Tomando $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

1. Una matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, $|A| \neq 0$ y recíprocamente.

   $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda = -2\lambda(\lambda - 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1$$

   Es decir, para estos dos valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, el determinante de la matriz A es cero y por tanto la matriz A no tiene inversa.

   Para que la matriz A tenga inversa tiene que ser $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

2. Si $\lambda = 1$, por el apartado anterior tendríamos que $|A| = 0$. Calculamos el rango de A que deberá de ser menor de 3.

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

   Por tanto, Rango $A = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, ya que es un sistema homogeneo, y por el menor escogido podemos despreciar la primera ecuación; quedará el sistema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & & =0 \\ & y & +z & =0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y & = & 0 \\ & y & = & -z \end{array}\right.$$

Si llamamos $z=t$ tenemos $y=-t$ y $x=t$, es decir, la solución sería:

$$\left\{\begin{array}{rr} x= & t \\ y= & -t \\ z= & t \end{array}\right.$$

Problema 59 Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A+I$, donde I es la matriz identidad.

1. Demostrar que A admite inversa, y obtenerla en función de A.
2. Dada la matriz $B=\left(\begin{array}{cc} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{array}\right)$, halla para que valores de m se verifica que $B^2 = 2B+I$, y para esos valores escribir la matriz inversa de B

Solución:

1. Tenemos que $A^2=2A+I \Longrightarrow A^2-2A=I \Longrightarrow (A-2I)A=I \Longrightarrow A^{-1}=A-2I$
2. Calculamos B^2

$$B^2=\left(\begin{array}{cc} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{array}\right)=$$
$$=\left(\begin{array}{cc} (1+m)^2+1 & 2 \\ 2 & (1-m)^2+1 \end{array}\right)$$

Como $B^2=2B+I$ tendremos

$$\left(\begin{array}{cc} (1+m)^2+1 & 2 \\ 2 & (1-m)^2+1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 2(1+m) & 2 \\ 2 & 2(1-m) \end{array}\right)+$$
$$+\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 2(1+m)+1 & 2 \\ 2 & 2(1-m)+1 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} (1+m)^2+1=2(1+m)+1 \\ (1-m)^2+1=2(1-m)+1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} m^2+2m+2= & 2m+3 \\ m^2-2m+2= & -2m+3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2=1 \\ m^2=1 \end{array}\right. \Longrightarrow m=\pm 1$$

Para $m = 1$ tenemos: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Para $m = -1$ tenemos: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 60 Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:
Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\left\{\begin{array}{lll} x-14= & 5(& y+z-28) \\ x+10= & & y+z+20 \\ x-42= & & y-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x- & 5y- & 5z+ & 126=0 \\ x- & y- & z- & 10=0 \\ x- & y+ & z- & 42=0 \end{array}\right.$$

Multiplicamos la 2ª ecuación por -5 y la sumamos a la 1ª:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126=0 \\ -5x+ & 5y+ & 5z+ & 50=0 \end{array}\right. \Longrightarrow -4x+176=0 \Longrightarrow x=44$$

Ahora por simple sustitución en la 2ª y la 3ª nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{rr} y+z= & 34 \\ y-z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=18 \\ z=16 \end{array}\right.$$

Problema 61 Discutir la existencia de soluciones del siguiente sistema según valores del parámetro α. Resolver, si es posible, para $\alpha = 10$.

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -z & =1 \\ x & -2y & +z & =3 \\ 5x & -5y & +2z & =\alpha \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & \alpha \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de α que anulan el determinante de A.

Tenemos que $|A| = 0$, y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$.

Ahora analizamos el rango de $\overline{A}$ para diferentes valores de α. Los determinantes que se pueden obtener, a parte del de A, son los siguientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -5 & \alpha \end{vmatrix} = 50 - \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 10$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha - 30 = 0 \Longrightarrow \alpha = 10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 10 - \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 10$$

Luego si $\alpha \neq 10 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$, y por tanto, el sistema es incompatible.

Si $\alpha = 10 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 2 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Vamos a resolver el sistema en este caso.

Por el menor elegido sabemos que las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes, y por tanto, se puede despreciar la tercera. El sistema sería el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x+ & y & -z & = 1 \\ x- & 2y & +z & = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 2x+ & y & = 1 + z \\ x- & 2y & = 3 - z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rc} x = & \dfrac{5+t}{5} \\ \\ y = & \dfrac{-5+3t}{5} \\ \\ z = & t \end{array}\right.$$

Problema 62 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & z = & 2 \\ x+ & y+ & az = & 2 \\ -ax & & -z = & -a \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ -a & 0 & -1 & -a \end{array} \right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.

- Para $a = -1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$

  Tenemos que $|A| = 0$ y además hay un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y por tanto, el Rango$(A) = 2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ y el Rango$(\overline{A}) = 3$.

  Concluyendo:
  Rango$(A) = 2 \neq$ Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

- Para $a = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$

  Sabemos que $|A| = 0$, luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

  En la matriz ampliada $\overline{A}$ vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

  Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$\overline{A} <$n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Vamos a resolverlo:

Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la primera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +y+ & z = & 2 \\ -x & - & z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 2 \\ x & + & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y = & 2 & -z \\ x & = & 1 & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & 1-\lambda \\ y = & 1 \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 63 Se consideran las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{array}\right) \quad ; \; B = \left(\begin{array}{ccr} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

1. Halla los valores de k para los que la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.

2. Halla los valores de k para los que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa.

Solución

1. Primero calculamos el producto de $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccr} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ahora calculamos el determinanate:

$$|A \cdot B| = \left|\begin{array}{ccc} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 2k^2 - 3k - (-k + k(-2+2k)) = 0$$

Independientemente del valor de k, luego $A \cdot B$ no tiene inversa, sea cual sea el valor de k.

2. Primero calculamos el producto de $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \left(\begin{array}{ccr} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{array}\right)$$

Ahora calculamos el determinanate:

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3$$

Esta expresión no se anula nunca, luego siempre existirá inversa de $B \cdot A$, sea cual sea el valor de k.

Problema 64 Se consideran las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinar x e y para que $MN = NM$

2. Calcular M^{2000} y M^{2001}

Solución:

1. Determinar x e y para que $MN = NM$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = & 0 \\ y = & 1 \end{array} \right.$$

2. Calcular M^{2000} y M^{2001}

   Para calcular estas potencias multiplicamos sucesivamente M hasta que los resultados se repitan:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = I_3 \cdot M = M$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = M \cdot M = M^2 = I_3$$

En general:

$M^n = M$ si n es impar $\Longrightarrow M^{2001} = M$.

$M^n = I_3$ si n es par $\Longrightarrow M^{2000} = I_3$.

Problema 65 Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

1. Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresa M^{-1} en términos de M e I.
2. Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.
3. Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

1. Tenemos $M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow (M - 2I)M = 3I \Longrightarrow \frac{1}{3}(M - 2I)M = I \Longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$
2. Tenemos $M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow M^2 = 3I + 2M$
   Por otra parte $M^3 = M^2 \cdot M = (3I + 2M)M = 3I \cdot M + 2M^2$, si volvemos a sustituir M^2 nos queda:
   $$M^3 = 3I \cdot M + 2(3I + 2M) = 3M + 6I + 4M = 7M + 6I$$
3. Primero calculamos M^2:
   $$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$
   Sustituimos en la expresión:
   $$M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2a & = 3 \\ 2b(a - 1) & = 0 \end{cases}$$
   Si $b = 0$ en la segunda ecuación, al sustituir este resultado en la primera obtendremos dos valores de a, que serían los resultados de la ecuación $a^2 - 2a - 3 = 0$, es decir, $a = 3$ y $a = -1$. Las matrices M obtenidas serían:
   $$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $a = 1$ en la segunda ecuación, al sustituir este resultado en la primera obtendremos dos valores de b, que serían los resultados de la ecuación $b^2 = 4$, es decir, $b = 2$ y $b = -2$. Las matrices M obtenidas serían:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 66 Cuatro colegiales llamados Luis, Javier, Enrique y Fermín se juntan en el recreo para intercambiar cromos. Fermín tiene cinco cromos más que Luis y Javier juntos, Enrique tiene el doble de cromos que Javier, y Javier tiene 90 cromos menos que Fermín y Enrique juntos. Calcula los cromos que tienen entre los cuatro.

Solución:

Sea x los cromos de Luis, y los cromos de Javier, z los cromos de Enrique, y h los cromos de Fermín.

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 5 + x + y \\ z = 2y \\ y + 90 = h + z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrr} x+ & y & & -h = & -5 \\ & 2y- & z & = & 0 \\ & y- & z & -h = & -90 \end{array} \right.$$

Multiplicamos la 3ª ecuación por -2 y la sumamos a la 2ª nos queda

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} x+ & y & & -h = & -5 \\ & 2y- & z & = & 0 \\ - & 2y+ & 2z & +2h = & 180 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrr} x+ & y & & -h = & -5 \\ & 2y- & z & = & 0 \\ & & z & +2h = & 180 \end{array} \right.$$

Y si ahora sumamos la primera y la tercera nos queda $x + y + z + h = 175$ que es lo que nos pedía el problema.

Problema 67 Discutir según el valor del parámetro real λ el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z = & 3 \\ 3x+ & 4y+ & \lambda z = & \lambda \end{array} \right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda & \lambda \end{array} \right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 5$$

- Si $\lambda \neq 5 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$Sistema compatible determinado.

- Para $\lambda = 5: \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A| = 0$ y además hay un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y por tanto, el Rango$(A) = 2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay dos columnas iguales, la última y la penúltima, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

  Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

  Vamos a resolverlo:

  Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la tercera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y = & 1 & -z \\ x+ & 2y = & 3 & -3z \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} x = & -1+ & h \\ y = & 2- & 2h \\ z = & & h \end{array}\right.$$

Problema 68 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcular $3A \cdot A^t - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

2. Resolver la siguiente igualdad matricial:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

1. La matriz $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ por lo que tenemos lo siguiente:

$$3A \cdot A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Tenemos que $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$. El hecho de que A tenga inversa nos permite resolver la ecuación matricial de la siguiente manera:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 69 Determinar para que valores de x tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$

y hallala en función de x

Solución:

- Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de cero, veamos los valores de x que anulan el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

En conclusión, la matriz A tiene inversa siempre que $x \neq 0$.

- Calculamos A^{-1}

$$A^{-1} = A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\left[\begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix}\right]}{-2x^2} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 & -x & x \\ -2x^2 & x^2 & x^2 \\ 0 & -x & -x \end{pmatrix}}{-2x^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2x} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2x} & \frac{1}{2x} \end{pmatrix}$$

Problema 70 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ mx- & y+ & z=2 \\ x+ & my- & z=1 \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.
2. (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

Solución:

1. Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & & z=3 \\ x- & y+ & z=2 \\ x+ & y- & z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ mx- & y+ & z=2 \\ x+ & my- & z=1 \end{array}\right.$$

$$A=\begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix}=-m(m+1)$$

$$-m(m+1)=0 \Longrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-1 \end{cases}$$

- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$A$ =Rango$\overline{A}$ = 3 =n^{o} de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

- Cuando $m=0 \Longrightarrow |A|=0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2 \neq 0$ tenemos que Rango$(A)=2$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3$

En conclusión, cuando $m=0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2 \neq$Rango$(\overline{A})=3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m=-1 \Longrightarrow |A|=0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A)=2$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3$

En conclusión, cuando $m=-1 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2 \neq$Rango$(\overline{A})=3$, luego en este caso también el sistema es incompatible.

Problema 71 Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

Problema 72 Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda x + 3y = & 3x + 9y \\ y = & 3y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda z + 3h = & 3z + 9h \\ h = & 3h \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)z = 0 \\ h = 0 \end{array} \right.$$

En conclusión, $\lambda = 3$ y x y z pueden ser cualquier valor que no cumpla $x = z = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 73 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular A^{-1}
2. Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Solución

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $AX = BA \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}BA \Longrightarrow IX = A^{-1}BA \Longrightarrow$
   $X = A^{-1}BA$ Por tanto:

   $$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

   $$X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 74 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real λ definimos $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

1. Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.

2. Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ.

Solución:

1. $B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

   $|B| = 0 \Longrightarrow (2-\lambda)\cdot(-2-\lambda) - (-3) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$

2. Si $\lambda = 1 : B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(B) = 1$ El sistema sería compatible indeterminado.

   $x - 3y = 0 \Longrightarrow x = 3y$ Las soluciones serían de la forma: $\left\{ \begin{array}{rr} x = & 3t \\ y = & t \end{array} \right.$

3. Si $\lambda = -1 : B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(B) = 1$ El sistema sería compatible indeterminado.

   $3x - 3y = 0 \Longrightarrow x = y$ Las soluciones serían de la forma: $\left\{ \begin{array}{rl} x = & t \\ y = & t \end{array} \right.$

Problema 75 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} ax+ & 7y+ & 20z = & 1 \\ ax+ & 8y+ & 23z = & 1 \\ x- & & az = & 1 \end{array} \right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 7 & 20 \\ a & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 7 & 20 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 21 - 20 = 1 - a^2$$

$|A| = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow rango(A) = 3 = rango(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a = -1$: $\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ -1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 21 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$

  $\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema incompatible.
- Para $a = 1$: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -21 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$

  $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Compatible indeterminado.

Soluciones para $a = 1$: $z = t$, $y = -3t$, $x = 1 - 7 \cdot (-3t) - 20t = 1 + t$.

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & 1+t \\ y = & -3t \\ z = & t \end{array}\right.$$

Problema 76 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Hallar A^n para todo entero positivo n.
2. Calcular, si existe, la inversa de la matrtiz A y la de la matriz $I_3 + A$.

Solución:

1. Calculamos las potencias de A:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots$$

Es decir:

$$A^n = \left\{\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n = 1 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n = 2 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n \geq 3 \end{array}\right.$$

2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir, para cualquier valor de a se cumple que $|A| = 0$, y por tanto A no tiene inversa. Por otro lado:

$$|A + I_3| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Longrightarrow |A + I_3| = 1$$

Es decir, para cualquier valor de a se cumple que $|A + I_3| \neq 0$, y por tanto tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 77 Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus determinantes:
$|A_1| = -(a+4)(a-2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ \ a = 2$
$|A_2| = 8(a+4) = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_3| = 12a + 48 = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_4| = (a+4)(3a+2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ \ a = -\frac{2}{3}$ El único valor de a que anula todos los determinantes es $a = -4$. Además tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.
Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:
Si $a = -4$ el rango de A es 2

Si $a \neq -4$ el rango de A es 3

Problema 78 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ ax+ & y+ & 2z = & 0 \\ x- & y+ & az = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.
2. (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.
3. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

1. Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular los valores de a que anulan el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad a = -1$$

Es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ tendríamos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incognitas; el sistema sería compatible determinado.
Si $a = 0$:

- Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

- Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 3$$

- En conclusión si $a = 0$ el sistema sería incompatible.

2. Si $a = -1$:

   - Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

   $$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

   - Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos comprobar:

   $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

     Es decir, $Rango(\overline{A}) = 2$.

   - En conclusión, si $a = -1$: $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <n^{\text{o}}$ de incognitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

3. Si $a = -1$ ya hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, resolvemos:

   $$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = \ 2 \\ -x+ & y+ & 2z & = \ 0 \\ x- & y- & z & = \ 1 \end{array} \right.$$

   Si a la primera le restamos la tercera nos queda $z = 1$ y si hacemos $y = \lambda$ tendríamos el resultado:

   $$\left\{ \begin{array}{rl} x = & 2+ \ \lambda \\ y = & \qquad \lambda \\ z = & 1 \end{array} \right.$$

4. Si $a = 2$ ya hemos comprobado que el sistema sería compatible determinado, resolvemos:

   $$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = \ 2 \\ 2x+ & y+ & 2z & = \ 0 \\ x- & y+ & 2z & = \ 1 \end{array} \right.$$

   Si a la tercera le restamos la primera tenemos: $2z = -1 \Longrightarrow$

$$z=-\frac{1}{2}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrr} x- & y= & 2\\ 2x+ & y= & 1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rr} x= & 1\\ y= & -1\end{array}\right. \text{ Es decir:}$$

$$\left\{\begin{array}{rr} x= & 1\\ \\ y= & -1\\ \\ z= & -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$