

Problemas de Geometría (Matemáticas 2º)

Problema 1 Se consideran las rectas:

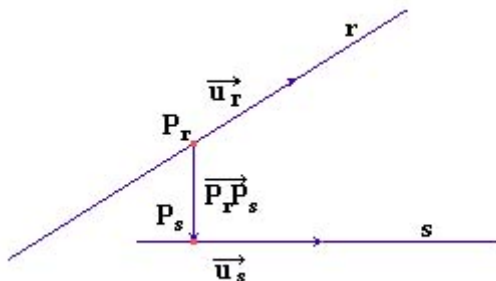
$$r : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-\alpha}{-1}$$

$$s : \frac{x+1}{3} = y-2 = z$$

1. Analizar en función de α la posición relativa de las dos rectas.
2. Para $\alpha = 14$ escribir la ecuación del plano π que contiene a ambas rectas.
3. Hallar la perpendicular común a las rectas s y t siendo t la siguiente recta:

$$t : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$$

Solución:



$$r : \begin{cases} P_r(1, 0, \alpha) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} P_s(-1, 2, 0) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 1) \end{cases}$$

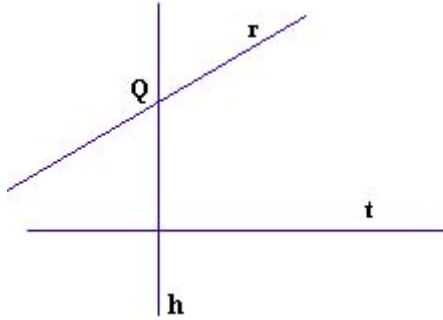
1. Vamos a ver para que valores de α los vectores \vec{v}_r , \vec{v}_s y $\overrightarrow{P_r P_s}$ son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha - 14 = 0 \implies \alpha = 14$$

Si $\alpha \neq 14$ el determinante es distinto de cero, lo que quiere decir que los tres vectores son linealmente independientes, y por tanto, las dos

rectas se cruzan.

Si $\alpha = 14$ el determinante es cero y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ esto quiere decir que \vec{v}_r y \vec{v}_s son linealmente independientes, y por tanto, $\overrightarrow{P_r P_s}$ depende linealmente de \vec{v}_r y \vec{v}_s , en conclusión las rectas r y s se cortan.



2. Replanteamos datos:

$$t: \begin{cases} P_t(0, 0, 0) \\ \vec{v}_t = (1, 2, -2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s(-1, 2, 0) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 1) \end{cases} \implies \overrightarrow{P_s P_t} = (1, -2, 0)$$

Veamos que posición relativa tienen s y t :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \implies \text{las dos rectas se cruzan.}$$

Tenemos que calcular la recta h perpendicular común a s y t , es decir, una recta cuyo vector director vendría determinado por:

$$\vec{v}_h = \vec{v}_s \times \vec{v}_t$$

$$\vec{v}_h = \vec{v}_s \times \vec{v}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4, 7, 5)$$

Ahora hallamos el plano π , que conteniendo a t es perpendicular a la recta s . Este plano y la recta s se cortarán en un punto Q .

Para construir π tenemos:

$$\begin{cases} \vec{v}_h = (-4, 7, 5) \\ \vec{v}_t = (1, 2, -2) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} -4 & 1 & x-0 \\ 7 & 2 & y-0 \\ 5 & -2 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 8x + y + 5z = 0; \quad s : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora buscamos el punto de corte:

$$8(-1 + 3\lambda) + (2 + \lambda) + 5\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{5}$$

$$\text{Luego el punto } Q \text{ será: } \begin{cases} x = -1 + 3 \cdot \frac{1}{5} \\ y = 2 + \frac{1}{5} \\ z = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{Es decir: } Q\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

$$\text{Tenemos por tanto: } h = \begin{cases} Q\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}, \frac{1}{5}\right) \\ \vec{v}_h = (-4, 7, 5) \end{cases}$$

Por lo que concluiremos:

$$h : \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 4 \cdot \lambda \\ y = \frac{11}{5} + 7 \cdot \lambda \\ z = \frac{1}{5} + 5 \cdot \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Se considera la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{y el plano } \pi : x + y + z - 1 = 0$$

Determinar las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta y cuya distancia al plano π sea igual que su distancia al origen de coordenadas. ¿Es único este punto?. Contestar razonadamente.

Solución:

Llamaríamos $O(0, 0, 0)$ al origen de coordenadas, y $P(x, y, z)$ a un punto que por estar sobre la recta r tendría de coordenadas $P(2t, t, 0)$; aplicando las fórmulas de distancia a un plano, y distancia a otro punto tendremos:

$$d(O, P) = \sqrt{(2t)^2 + t^2} = \sqrt{4t^2 + t^2} = t\sqrt{5}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|2t \cdot 1 + t \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|2t + t - 1|}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Como } d(O, P) = d(P, \pi) \implies t\sqrt{5} = \frac{|3t-1|}{\sqrt{3}} \implies$$

$$\begin{cases} t\sqrt{5} = \frac{3t-1}{\sqrt{3}} \implies t = \frac{1}{3-\sqrt{15}} \\ t\sqrt{5} = -\frac{3t-1}{\sqrt{3}} \implies t = \frac{1}{3+\sqrt{15}} \end{cases}$$

Sustituyendo t en r se obtienen los puntos pedidos:

$$P\left(\frac{2}{3-\sqrt{15}}, \frac{1}{3-\sqrt{15}}, 0\right) \text{ y } P'\left(\frac{2}{3+\sqrt{15}}, \frac{1}{3+\sqrt{15}}, 0\right)$$

Esta claro que el punto no es único, ya que como hemos visto son dos los que cumplen la condición del problema.

Problema 3 Se consideran las rectas r_1 y r_2 dadas por:

$$r_1 : \begin{cases} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & 3y+ & z = & 1 \end{cases} \quad r_2 =: \begin{cases} x = & 3t \\ y = & 1- & 2t \\ z = & 2+ & t \end{cases}$$

Encontrar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto de intersección de r_2 con el plano $\pi = x - 3y - 2z + 7 = 0$

Solución

Hallamos el punto de corte entre π y r_2 por simple sustitución, es decir, $3t - 3(1 - 2t) - 2(2 + t) + 7 = 0 \implies t = 0$ y sustituyendo ahora este valor en r_2 obtendríamos el punto $P(0, 1, 2)$.

Ahora vamos a pasar la recta r_1 a paramétricas:

$$r_1 : \begin{cases} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & 3y+ & z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x+ & y = & 2t \\ 2x- & 3y = & 1-t \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = & 4t \\ 2x - 3y = & 1-t \end{cases} \implies 5y = 5t - 1 \implies y = \frac{5t - 1}{5}$$

$$x = 2t - \frac{5t - 1}{5} = \frac{5t + 1}{5}$$

Nos quedaría:

$$r_1 : \begin{cases} x = & \frac{1}{5} + t \\ y = & -\frac{1}{5} + t \\ z = & t \end{cases} \quad r_1 : \begin{cases} \vec{u} = (1, 1, 1) \\ P_r(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0) \end{cases}$$

Calculamos ahora $\overrightarrow{P_r P} = (0 - \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5}, 2 - 0) = (-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, 2)$.

El plano buscado lo obtendríamos con los siguientes datos:

$$\begin{cases} P(0, 1, 2) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r P} = (-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, 2) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & x-0 \\ 1 & \frac{6}{5} & y-1 \\ 1 & 2 & z-2 \end{vmatrix} = 4x - 11y + 7z - 3 = 0$$

Problema 4 Sean r la recta determinada por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, -1, -1)$ y s la recta de ecuaciones: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$.

Se pide:

1. Su posición relativa.
2. Hallar, si existe, una recta que pase por el punto $C = (1, 2, 4)$ y que corte a las rectas r y s .

Solución:

1. La recta r pasa por los puntos A y B , para construirla calculamos el vector director de ella $\vec{u}_r = \vec{AB} = (0, -1, 0)$
Vamos a escribir las dos rectas en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \\ z = -1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas no son paralelos, $\vec{u}_r = (0, -1, 0)$ y $\vec{u}_s = (2, 5, 3)$. Lo que quiere decir que, o bien se cortan o bien se cruzan. Vamos a resolverlo mediante un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 2\lambda = 1 \quad (1) \\ 5\lambda = -1 - t \quad (2) \\ 3\lambda = -1 \quad (3) \end{array} \right\} \text{Despejando } \lambda \text{ de (1) y (3) tenemos:}$$

$$\text{De (1)} \implies \lambda = -1$$

$$\text{De (3)} \implies \lambda = -\frac{1}{3}$$

Como los dos valores de λ son diferentes, concluimos con que las dos rectas se cruzan.

2. Si construimos el plano π_1 determinado por la recta r y el punto C , y construimos el plano π_2 determinado por la recta s y el punto C . Por tanto, la recta pedida sería la intersección de estos dos planos.

- Calculamos π_1 :

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{AB} = (0, -1, 0) \\ \vec{u}_2 = \vec{AC} = (0, 2, 5) \\ A(1, 0, -1) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 5 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies -5(x-1) = 0 \implies \pi_1 : x-1 = 0$$

- Calculamos π_2 :

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}_s = (2, 5, 3) \\ \vec{u}_2 = \vec{PC} = (-2, 2, 4) \\ P(3, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -2 & x-3 \\ 5 & 2 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : x - y + z - 3 = 0$$

Ahora resolvemos el sistema formado por ambos planos, para comprobar que se trata de una recta:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = x + z - 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Que sería la recta que nos piden.

Problema 5 Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

1. Identificar C_1 y C_2 . Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).
2. Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1 .

Solución:

1. $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \implies \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \implies \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.

Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \implies c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Podemos concluir:

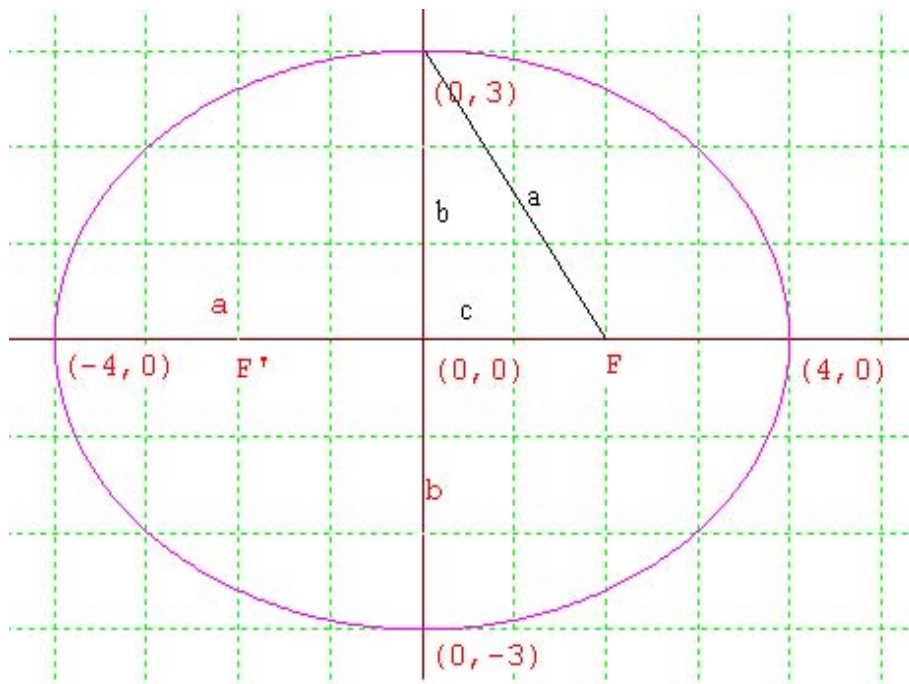
- Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
- Vértices: $(-4, 0)$ $(0, 3)$ $(0, -3)$ $(4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
- Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.

$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \implies \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \implies \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.

Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \implies c = \sqrt{16 + 9} = 5$

Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$



Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0,0)$ las rectas buscadas serían:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

Podemos concluir:

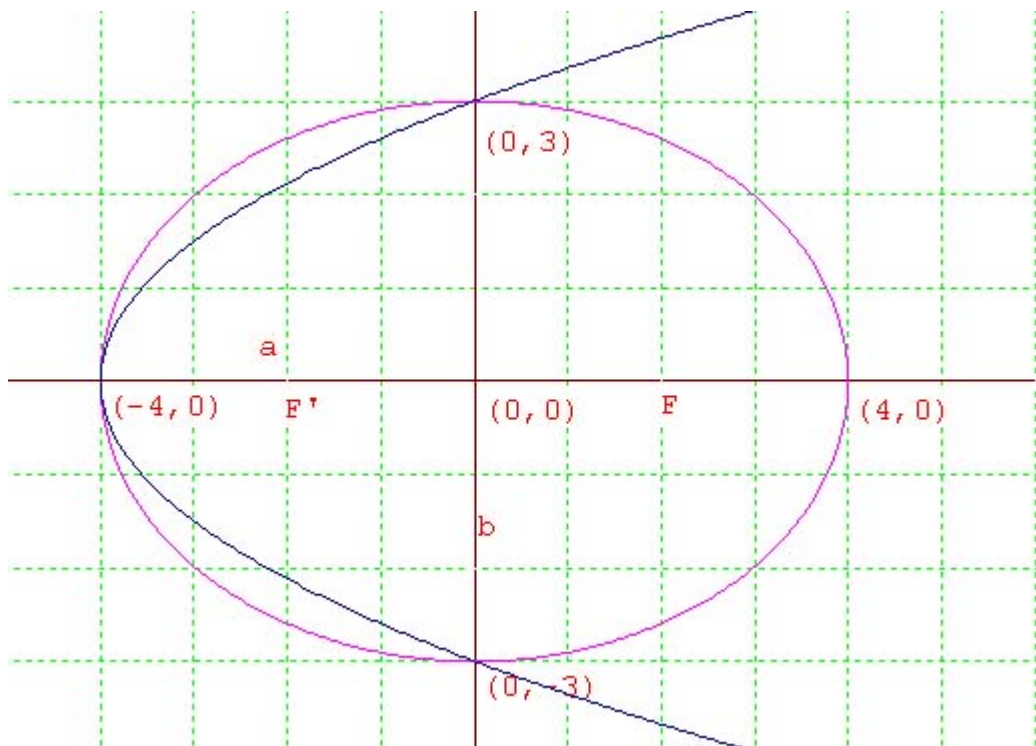
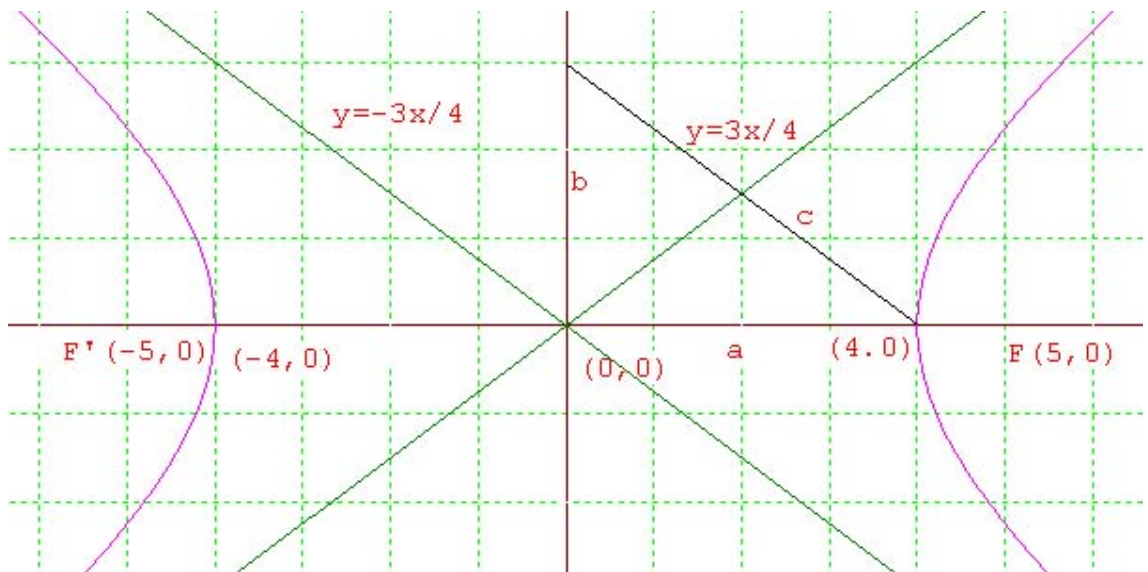
- Focos: $(-5, 0)$ $(5, 0)$
- Vértices: $(-4, 0)$ $(4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

2. La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abscisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.

Como pasa por el vértice $(-4, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} -4 = & & c \\ 0 = & 9a + & 3b + c \\ 0 = & 9a - & 3b + c \end{cases} \implies c = -4, \quad a = \frac{4}{9} \quad y \quad b = 0 \implies x = \frac{4}{9}y^2 - 4$$



Problema 6 Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r :

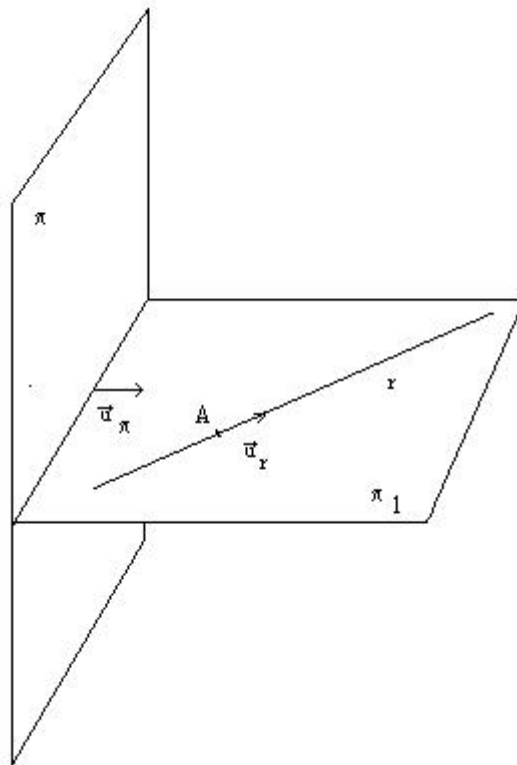
$$x = 1 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π :

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:

Los datos que tenemos son los siguientes:



$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases} \quad \pi : \vec{u}_\pi = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_\pi = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases}$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

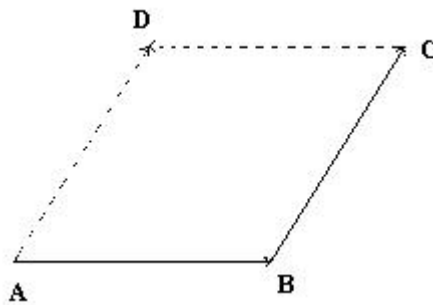
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 7 Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

Se pide:

1. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.
2. Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:



1. Los vectores que nos proporciona el problema son: $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 1)$.

Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \implies (-1, 1, 1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$, el punto será $D(0, 2, 2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2) \implies Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no será otra cosa que calcular el módulo de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC}

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el

ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\vec{AB} = (1, 1, 1)$ y $\vec{AD} = (-1, 1, 1)$

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1 + 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \implies \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 8 Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r :

$$x = 1 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π :

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:

Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases} \quad \pi : \vec{u}_\pi = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_\pi = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases}$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 9 Los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(2, 1, 3)$, $C(2, 3, -1)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

Se pide:

1. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.
2. Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

1. Los vectores que nos proporciona el problema son: $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 3)$ y $\overrightarrow{BC} = (0, 2, -4)$.

Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \implies (0, 2, -4) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0)$ y por tanto $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $z_0 = -4$, el punto será $D(1, 3, -4)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-6, 4, 2) \implies Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \\ &= \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no será otra cosa que calcular el módulo de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC}

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 0 + 9} = \sqrt{10} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0 + 4 + 16} = \sqrt{20}$$

Es decir, los lados del paralelogramo no son iguales, y por tanto, sólo queda por comprobar si es un rectángulo, para comprobarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un rectángulo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 3)$ y $\overrightarrow{AD} = (0, 2, -4)$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{12}{\sqrt{10} \sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{200}} \implies \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

no es rectángulo.

Problema 10 Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad x - 2y + 3z - 4 &= 0 \\ \pi_2 : \quad 2x + y + z + 1 &= 0 \\ \pi_3 : \quad -2x + 4y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \\ -2x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

Sean las matrices A y \overline{A} siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Pero podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \implies \text{Rango}A = 2$

Calculamos ahora el rango de \bar{A} , calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -40 \neq 0 \implies \text{Rango}\bar{A} = 3.$$

En conclusión $\text{Rango}A = 2 \neq \text{Rango}\bar{A} = 3$ y tendremos que compararlos dos a dos; comparamos π_1 y π_3 :

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-4}{0}$$

Esto quiere decir que π_1 y π_3 son paralelos, y por tanto, π_2 corta a los dos.

Problema 11 Probar que las rectas

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$s : \begin{cases} x- & y- & z = & 1 \\ 2x- & 2y+ & z = & -1 \end{cases}$$

se cortan en un punto y calcular el ángulo que forman.

Solución:

Calculamos el vector director de la recta s :

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3i - 3j = (-3, -3, 0) = -3(1, 1, 0)$$

Calculamos un punto de s , para ello hacemos $x = 0$, y obtenemos $P_2(0, 0, 1)$.

En resumen, podemos escribir lo siguiente:

$$r : \begin{cases} P_1(3, 2, 1) \\ \vec{u}_r = (2, 1, 2) \end{cases} \quad s : \begin{cases} P_1(0, 0, -1) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 0) \end{cases}$$

Calculamos un vector $\overrightarrow{P_2P_1} = (3, 2, 2)$ y construimos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como el rango de A es dos, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y además $|\overline{A}| = 0$ podemos concluir que $\text{Rango}A = \text{Rango}\overline{A} = 2$, luego las dos rectas se cortan.

$$\cos \alpha = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \alpha = 45^\circ$$

Problema 12 Hallar la ecuación de los planos paralelos al plano $2x + y - z = 2$ y estén a una distancia $d = 3$ de él.

Solución:

Sea el punto $P(x, y, z)$, si este punto está a una distancia $d = 3$ del plano dado debe de cumplir que

$$\frac{|2x + y - z - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 3 \implies |2x + y - z - 2| = 3\sqrt{6}$$

Obtendremos dos planos:

$$\pi_1 : 2x + y - z - 2 = -3\sqrt{6} \implies 2x + y - z - 2 + 3\sqrt{6} = 0 \implies 2x + y - z + 5.348469228 = 0$$

$$\pi_2 : 2x + y - z - 2 = 3\sqrt{6} \implies 2x + y - z - 2 - 3\sqrt{6} = 0 \implies 2x + y - z - 9.348469228 = 0$$

Problema 13 Calcular una recta que sea perpendicular a las siguientes rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

$$s : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -i + 3j + 5k = (-1, 3, 5)$$

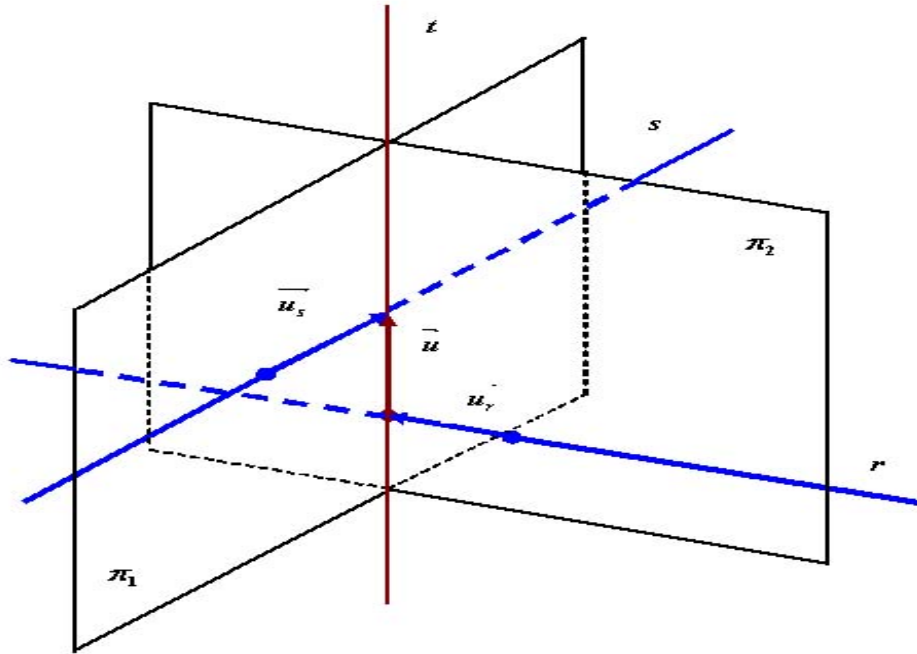
Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \implies \begin{cases} -y + z = 1 \\ 2y - z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \implies P_s(0, 3, 4)$$

Tenemos, por tanto

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 3, 5) \\ P_s(0, 3, 4) \end{cases}$$

La recta t que buscamos será la intersección de dos planos π_1 y π_2 . Para encontrarlos buscamos un vector que sea perpendicular a los dos vectores



directores de las rectas dadas, es decir, el producto vectorial de ambos vectores

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -8i - 11j + 5k = (-8, -11, 5)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u} = (-8, -11, 5) \\ \vec{u}_s = (-1, 3, 5) \\ P_s(0, 3, 4) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \vec{u} = (-8, -11, 5) \\ \vec{u}_r = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$$

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} -8 & -1 & x \\ -11 & 3 & y-3 \\ 5 & 5 & z-4 \end{vmatrix} = -70x - 45y + 13z + 83 = 0$$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & x-1 \\ -11 & -1 & y \\ 5 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = -6x + 2y + 14z + 20 = 0$$

La recta buscada será:

$$h : \begin{cases} -70x - 45y + 13z + 83 = 0 \\ -6x + 2y + 14z + 20 = 0 \end{cases}$$

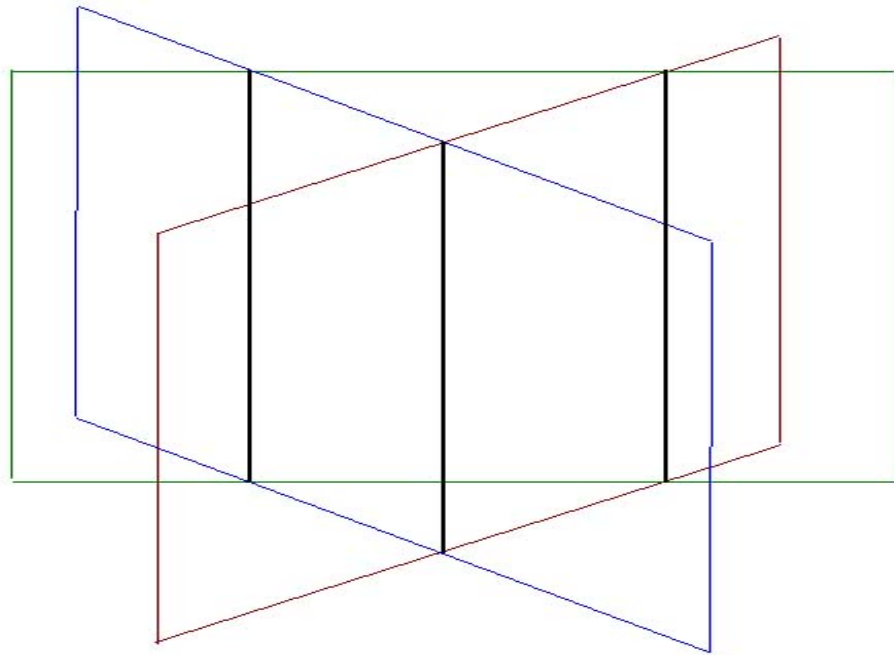
Problema 14 Determinar la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 : x - 2y + 3z - 4 = 0$$

$$\pi_2 : 2x + y + z + 1 = 0$$

$$\pi_3 : -3x + y - 4z - 3 = 0$$

Solución:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $|A| = 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

En conclusión $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}\bar{A} = 3$, luego no hay soluciones comunes para los tres plano, y tendremos que compararlos dos a dos:

Comparamos π_1 con π_2 : $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

Comparamos π_1 con π_3 : $\frac{1}{-3} \neq \frac{-2}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

Comparamos π_2 con π_3 : $\frac{2}{-3} \neq \frac{1}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

En conclusión, los planos se cortan dos a dos.

Problema 15 Dadas las rectas

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$s : \begin{cases} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 2y+ & z = & -1 \end{cases}$$

estudiar su posición en el espacio y calcular el ángulo que forman.

Solución:

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -i - 3j - 4k = (-1, -3, -4)$$

Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \implies \begin{cases} y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \implies P_s(0, 0, -1)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 2) \\ P_r(3, 2, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, -3, -4) \\ P_s(0, 0, -1) \end{cases}$$

Tomamos el vector $\vec{u} = \overrightarrow{P_r P_s} = (-3, -2, -2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\text{Rango}A = 2 \neq \text{Rango}\bar{A} = 3 \implies$ Las dos rectas se cruzan.

El ángulo que forman las dos rectas vendrá dado por

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{|-2 - 3 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 4} \sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{13}{3\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$$\cos \alpha = 0,8498365855 \implies \alpha = 31,80610002^\circ$$

Problema 16 La recta

$$r : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = -6 + 5t \end{cases}$$

corta al plano $\pi_1 : x - y - 2z = 1$ en el punto A y al plano $\pi_2 : x + y - z = 0$ en el punto B . Si O es el origen de coordenadas

1. Hallar el ángulo entre los vectores \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} .
2. Hallar el área del triángulo OAB

Solución:

Cálculo del punto A :

Sustituimos r en el plano π_1 y nos queda

$(-2+3t) - (4-2t) - 2(-6+5t) = 1 \implies t = 1$ y sustituyendo en r obtenemos:

$$\begin{cases} x = -2 + 3 \\ y = 4 - 2 \\ z = -6 + 5 \end{cases} \implies A(1, 2, -1)$$

Cálculo del punto B :

Sustituimos r en el plano π_2 y nos queda

$(-2+3t) - (4-2t) - (-6+5t) = 0 \implies t = 2$ y sustituyendo en r obtenemos:

$$\begin{cases} x = -2 + 6 \\ y = 4 - 4 \\ z = -6 + 10 \end{cases} \implies B(4, 0, 4)$$

1. Cálculo de \overrightarrow{OA} :

$$\overrightarrow{OA} = (1, 2, -1) - (0, 0, 0) = (1, 2, -1)$$

Cálculo de \overrightarrow{OB} :

$$\overrightarrow{OB} = (4, 0, 4) - (0, 0, 0) = (4, 0, 4)$$

Si α es el ángulo que forman \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} tendremos

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{|1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{16+0+16}} = 0 \implies \alpha = 90^\circ$$

Los dos vectores son perpendiculares.

$$2. \text{Área} = \frac{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{32}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Problema 17 Calcular una recta que pase por el punto $(1, 0, 1)$ que sea paralela al plano π_1 de ecuación $\pi_1 : x - 2y + z = 1$ y que también sea paralela al plano π_2 que pasa por los puntos de coordenadas $(2, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$ y $(1, -1, 0)$

Solución:

Si r es paralela a π_1 y a π_2 es que es paralela a la intersección de los dos planos.

Calculamos primero el plano π_2 :

$$\pi_2 = \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, 1) - (2, 0, 1) = (-2, 2, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, -1, 0) - (2, 0, 1) = (-1, -1, -1) \\ A(2, 0, 1) \end{cases} \implies$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} -2 & -1 & x-2 \\ 2 & -1 & y \\ 0 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x + y - 2z = 0$$

La recta s viene definida por la intersección de dos planos

$$s : \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Para calcular una recta que sea paralela a s calculamos su vector director.

Vector normal del plano π_1 es $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$

Vector normal del plano π_2 es $\vec{v}_2 = (1, 1, -2)$

El vector director de la recta s será $\vec{u}_s = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ producto vectorial.

$$\vec{u}_s = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3i + 3j + 3k = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$$

La recta pedida tiene como vector director $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$:

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \implies x - 1 = y = z - 1$$

Problema 18 Consideremos un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$, siendo $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 1)$, $C(2, 4, 1)$ y $E(1, 2, 7)$. Hallar el área de una de las bases, el volumen del paralelepípedo y la distancia entre sus bases.

Solución:

Igualdades:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$$

$$\text{Área de la base} = |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}|$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 1) - (1, 1, 1) = (1, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{BC} = (2, 4, 1) - (2, 1, 1) = (0, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3k = (0, 0, 3)$$

Área = $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}| = \sqrt{9} = 3u^2$ El volumen es el producto mixto de los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} y \overrightarrow{AE} . Nos falta por calcular \overrightarrow{AE} .

$$\overrightarrow{AE} = (1, 2, 7) - (1, 1, 1) = (0, 1, 6)$$

$$\text{Volumen} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 18u^3$$

Ahora sabemos que el volumen es igual al área de la base por la altura del paralelepípedo, luego la altura será igual al cociente entre el volumen y el área de la base, altura = $\frac{18}{3} = 6u$

Problema 19 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

1. Estudiar la posición relativa de r y s .
2. Hallar la ecuación de una recta que sea perpendicular, simultáneamente a r y a s .

Solución:

1.

$$r := \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \quad s := \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, 0) \\ P_s(0, 2, 0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = -4 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \implies$ las dos rectas se cruzan.

2. Sea t la perpendicular común, tendremos que el vector director de t es

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i - j + k = (2, -1, 1)$$

Obtenemos r como corte de dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ \vec{u}_t = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, 0) \\ \vec{u}_t = (2, -1, 1) \\ P_s(0, 2, 0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies y + z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2x - y - 5z + 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} y+ & z & = 0 \\ 2x- & y- & 5z & +2 & = 0 \end{cases}$$

Problema 20 Dados los puntos $A(1, -3, 1)$, $B(2, 3, 1)$ y $C(1, 3, -1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano π
3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A , B , C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. El plano π viene determinado, como siempre, por dos vectores y un punto:

$$\pi : \begin{cases} \overline{AB} = (1, 6, 0) \\ \overline{AC} = (0, 6, -2) \\ A(1, -3, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \\ \implies \pi : -6x + y + 3z + 6 = 0$$

2.

$$d(O, \pi) = \frac{|0 \cdot (-6) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 6|}{\sqrt{36 + 1 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{46}} u$$

3. El volumen de un tetraedro es $V = \frac{1}{3} \cdot b \cdot h$, donde b es el área de la base y h la altura.

$$b = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{array} \right| = |(-12, 2, 6)| \implies$$

$$\implies b = \sqrt{144 + 4 + 36} = 2\sqrt{46} u^2$$

$$h = d(O, \pi) = \frac{6}{\sqrt{46}} \implies V = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{46} \cdot \frac{6}{\sqrt{46}} = 4 u^3$$

Problema 21 Sea el plano $\pi : x - 2y - z + 1 = 0$

Hallar:

1. El punto simétrico P' de $P(1, 3, 2)$ y el punto simétrico Q' de $Q(4, 0, -1)$ respecto de π .
2. La recta simétrica de la recta que une a los puntos P y Q respecto del plano π .

Solución:

1. Para calcular el punto P' simétrico de P calculamos una recta perpendicular al plano π y que pase por P , sea r dicha recta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Para calcular el punto de corte de r y π hacemos

$$(1 + t) - 2(3 - 2t) - (2 - t) + 1 = 0 \implies t = -1 \implies P''(0, 5, 3)$$

P'' es el punto medio entre P y P' , luego

$$P'' = \frac{P' + P}{2} \implies P' = 2P'' - P = 2(0, 5, 3) - (1, 3, 2) = (-1, 7, 4)$$

Para calcular el punto Q' simétrico de Q calculamos una recta perpendicular al plano π y que pase por Q , sea s dicha recta

$$s : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Para calcular el punto de corte de s y π hacemos

$$(4+t) - 2(-2t) - (-1-t) + 1 = 0 \implies t = -1 \implies Q''(3, 2, 0)$$

Q'' es el punto medio entre Q y Q' , luego

$$Q'' = \frac{Q' + Q}{2} \implies Q' = 2Q'' - Q = 2(3, 2, 0) - (4, 0, -1) = (2, 4, 1)$$

2. La recta que buscamos une los puntos P' y Q' y pasa por ambos puntos

$$\begin{cases} \overrightarrow{P'Q'} = (3, -3, -3) \\ P'(-1, 7, 4) \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 7 - 3t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \implies$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-4}{-3}$$

- Problema 22** 1. Determinar el centro y el radio de la circunferencia

$$C : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$

2. Obtener la ecuación de la recta tangente a C en el punto $P(4, 0)$
 3. Encontrar la ecuación de la circunferencia concéntrica con C que es tangente a la recta de ecuación $s : 2x - y + 2 = 0$.

Solución:

- 1.

$$\begin{cases} m = -2a = -4 \\ n = -2b = 2 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ r = \sqrt{5} \end{cases}$$

La circunferencia tiene de centro $A(2, -1)$ y radio $r = \sqrt{5}$

2. El vector $\overrightarrow{AP} = (2, 1)$, y como la recta tangente es perpendicular a él tendrá como vector director $\vec{u} = (-1, 2)$

$$\begin{cases} \vec{u} = (-1, 2) \\ P(4, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2t \end{cases} \implies 2x + y - 8 = 0$$

3. La circunferencia que buscamos tiene el mismo centro $A(2, -1)$ que la dada, lo único que nos queda por calcular es su radio. Como la recta que nos dan es tangente a la circunferencia, la distancia desde el centro a la recta será el radio que buscamos.

$$d(A, s) = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

La ecuación de la circunferencia será

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{49}{5} \implies 5x^2 + 5y^2 - 20x + 10y - 24 = 0$$

Problema 23 Se consideran las cónicas C_1 y C_2 , cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

1. Identificar C_1 y C_2 . Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad y asíntotas (si existen).
2. Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1 .

Solución:

1. $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \implies \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \implies \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.

Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \implies c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Podemos concluir:

- Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
- Vértices: $(-4, 0)$ $(0, 3)$ $(0, -3)$ $(4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
- Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.

$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \implies \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \implies \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.

Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \implies c = \sqrt{16 + 9} = 5$

Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$

Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0, 0)$ las rectas buscadas serían:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

Podemos concluir:

- Focos: $(-5, 0)$ $(5, 0)$
- Vértices: $(-4, 0)$ $(4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

2. La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abscisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.

Como pasa por el vértice $(-4, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} -4 = & c \\ 0 = & 9a + 3b + c \\ 0 = & 9a - 3b + c \end{cases} \implies c = -4, a = \frac{4}{9} \quad y \quad b = 0 \implies x = \frac{4}{9}y^2 - 4$$

Problema 24 1. (1 punto) Calcula el área de un triángulo de vértices $A(1, 1, 2)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(1, -3, 2)$.

2. (1 punto) Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi : x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s : \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución:

- 1.

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, -3); \quad \overrightarrow{AC} = (0, -4, 0)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} \right| = |(-12, 0, 0)| = 12$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{12}{2} = 6$$

2. Calculamos la intersección de π y la recta s :

$$s : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases} \implies 3t + 2 + t - (-1 + t) + 6 = 0 \implies t = -3 \implies P(-9, -1, -4)$$

La recta pedida pasará por este punto y tendrá como vector director

$$\vec{u} = (3, 1, 0) \times (4, -3, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -13)$$

La recta pedida es

$$x + 9 = \frac{x + 1}{-3} = \frac{z + 4}{13}$$

- Problema 25** 1. Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene centro $C(1, 4)$ y es tangente a la recta $s : 3x + 4y - 4 = 0$
2. Determinar el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(0,0)$, $(0,2)$ y $(2,4)$.

Solución:

1.

$$r = d(C, s) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

Luego la ecuación buscada es $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

2. La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, y sustituyendo los puntos dados en la ecuación tenemos:

$$\begin{cases} p = 0 \\ 2n + p + 4 = 0 \\ 2m + 4n + p + 20 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} m = -2a = -6 \\ n = -2b = -2 \\ p = a^2 + b^2 - r^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ r = \sqrt{10} \end{cases}$$

En conclusión, el centro es $C(3, 1)$, el radio $r = \sqrt{10}$ y la ecuación de la circunferencia pedida será $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

- Problema 26** 1. Calcular la distancia del punto de coordenadas $(1, 1, 2)$ al plano que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.
2. Calcular la distancia del punto de coordenadas $P(3, 5, 0)$ a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(0, 1, 2)$ y $B(0, 1, 1)$.

Solución:

1. Vamos a calcular el plano que pasa por los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, 1)$. Para ello obtenemos los vectores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) - (1, 1, 0) = (0, -1, 1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 1)$$

El plano vendrá definido por

$$\pi : \begin{cases} \vec{u} = (0, -1, 1) \\ \vec{v} = (-1, 0, 1) \\ A(1, 1, 0) \end{cases} \implies$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x + y + z - 2 = 0$$

Ahora calculamos la distancia del punto $P(1, 1, 2)$ al plano π :

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 + 1 + 2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2. Primero calculamos el vector director de la recta que pasa por los puntos $A(0, 1, 2)$ y $B(0, 1, 1)$, para ello calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) - (0, 1, 2) = (0, 0, -1)$, y un vector auxiliar $\overrightarrow{AP} = (3, 5, 0) - (0, 1, 2) = (3, 4, -2)$. Ahora calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4i - 3j = (4, -3, 0)$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{1}} = 5$$

Problema 27 Compruebe que las rectas

$$r : (x, y, z) = (3, -4, 0) + t(2, -3, -2)$$

$$s : (x, y, z) = (-7, 1, 2) + h(4, -1, 0)$$

se cortan en un punto. Halle también la ecuación general del plano que determinan.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, -3, -2) \\ P_r = (3, -4, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (4, -1, 0) \\ P_s = (-7, 1, 2) \end{cases}$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (-7, 1, 2) - (3, -4, 0) = (-10, 5, 2)$ y tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = 0 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) \implies$ las dos rectas se cortan.

El plano que determinan estas dos rectas será:

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, -3, -2) \\ \vec{u}_s = (4, -1, 0) \\ P_r = (3, -4, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & 4 & x-3 \\ -3 & -1 & y+4 \\ -2 & 0 & z \end{vmatrix} = x + 4y - 5z + 13 = 0$$

Problema 28 Dados el plano $\pi : x + y + z = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

1. Hallar la ecuación de una recta s que sea perpendicular a r y pase por P .
2. Hallar el punto P' , simétrico de P respecto de r .
3. Hallar el punto P'' , simétrico de P respecto de π .

Solución:

1. Hallamos primero la ecuación del plano π' perpendicular a la recta r y que pase por P . Este plano tendrá como vector normal al vector director de la recta $u_r = (0, 1, 1)$.

La ecuación general de este plano será $y + z + K = 0$, para calcular K particularizamos que este plano contiene al punto $P(1, 1, 0)$, y por simple sustitución tenemos que

$$1 + 0 + k = 0 \implies k = -1 \implies \pi' : y + z - 1 = 0$$

Ahora tenemos que encontrar el punto de corte de este plano y la recta r , para ello creo que lo más fácil es con la ecuación de la recta en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Sustituyendo en el plano tendremos $t + t - 1 = 0 \implies t = \frac{1}{2}$ el punto que buscamos será por tanto $Q\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

La recta que queremos obtener pasa por P y por Q :

$$\begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{QP} = (1, 1, 0) - \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ P(1, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

2. El punto Q que hemos obtenido será el punto medio entre P y P' , y por tanto

$$Q = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2Q - P = 2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 1, 0) = (1, 0, 1)$$

3. Ahora la recta que une los puntos P y P'' es perpendicular al plano π , y por tanto el vector director de esta recta es el vector normal del plano, llamando t a esta recta podemos ponerlo de la siguiente manera $\vec{u}_\pi = \vec{u}_t = (1, 1, 1)$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, 1) \\ P(1, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Buscamos el punto de corte de esta recta con el plano π , por simple sustitución

$$1 + \mu + 1 + \mu + \mu = 1 \implies \mu = -\frac{1}{3}$$

Obtenemos el punto de corte $H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$$H = \frac{P + P''}{2} \implies P'' = 2H - P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Problema 29 (3 puntos) Dadas las rectas en el espacio:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

- Hallar la distancia entre las dos rectas.
- Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s .

Solución:

-

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -2, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -1, 2) \\ P_s(-1, -2, 1) \end{cases}$$

$$\vec{u} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3i - 4j + k = (-3, -4, 1)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, -2, 1) - (2, 1, 0) = (-3, -3, 1)$$

$$[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 22$$

Luego la distancia entre las dos rectas será:

$$d(r, s) = \frac{\left| \left[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s} \right] \right|}{\left| \vec{u}_r \times \vec{u}_s \right|} = \frac{22}{\sqrt{26}}$$

2.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -2, 1) \\ \vec{u} = (-3, -4, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -1, 2) \\ \vec{u} = (-3, -4, 1) \\ P_s(-1, -2, 1) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & -3 & x-2 \\ -2 & -4 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x - 3y - 9z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -3 & x+1 \\ -1 & -4 & y+2 \\ 2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 7x - 8y - 11z + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x - 3y - 9z + 1 = 0 \\ 7x - 8y - 11z + 2 = 0 \end{cases}$$

Problema 30 Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

- (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .
- (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π' .

Solución:

1. Datos:

$$\pi : \vec{u}_\pi = (1, 3, -1) \quad r : \begin{cases} \vec{u}_r = (6, 2, 1) \\ P_r(-2, 1, 0) \end{cases}$$

$$\pi' : \begin{vmatrix} 1 & 6 & x+2 \\ 3 & 2 & y-1 \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi' : 5x - 7y - 16z + 17 = 0$$

2.

$$s : \begin{cases} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 5x - 7y - 16z + 17 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 3y = 1 + z \\ 5x - 7y = -17 + 16z \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 + \frac{5}{2} \cdot \lambda \\ y = 1 - \frac{1}{2} \cdot \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 31 Discutir la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro a .

$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + z = 0 \\ \pi_2 : ay + 2z = 4 \\ \pi_3 : 2y + az = 4 \end{cases}$$

Solución

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 4 \\ 0 & 2 & a & 4 \end{array} \right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \implies |A| = a^2 - 4 = 0 \implies a = 2, a = -2$.

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ tendremos que $|A| \neq 0$ por lo que $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $a = 2$ tendremos

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Vemos que tiene dos filas iguales, y además $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Por lo que podemos concluir en este caso que $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < n^\circ$ incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado. Los planos π_2 y π_3 son coincidentes, y el plano π_1 los corta en una recta.

Si $a = -2$ tendremos:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Primero tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, por lo que $\text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

tenemos que $\text{Rango}(\bar{A}) = 3$

En este caso, por tanto, $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3$. El sistema es Incompatible y para ver la posición de los planos los comparamos dos a dos. Vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos, y el plano π_1 los corta a los dos.

Problema 32 Sea la recta

$$r : \begin{cases} 2x & + & z = 1 \\ x & + y - & z = 0 \end{cases}$$

1. Calcular la ecuación de un plano que sea perpendicular a ella y contenga al punto $P(1, 1, 0)$.
2. Calcular la intersección de este plano y r .
3. Calcular el punto simétrico de P respecto de r .

Solución:

1.

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 2)$$

$$\pi : -x + 3y + 2z + \lambda = 0$$

Como este plano tiene que contener al punto P , por simple sustitución tenemos: $-1 + 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2$.

$$\pi : -x + 3y + 2z - 2 = 0 \implies x - 3y - 2z + 2 = 0$$

2. Pongo r en paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

y sustituyo en π , $\lambda - 3(1 - 3\lambda) - 2(1 - 2\lambda) = 0 \implies \lambda = \frac{3}{14}$

Sustituyendo este valor en r tenemos el punto $P' \left(\frac{3}{14}, \frac{5}{14}, \frac{8}{14} \right)$

3.

$$P' = \frac{P'' + P}{2} \implies \begin{cases} \frac{3}{14} = \frac{x+1}{2} \implies x = -\frac{4}{7} \\ \frac{5}{14} = \frac{y+1}{2} \implies y = -\frac{2}{7} \\ \frac{8}{14} = \frac{z}{2} \implies z = \frac{4}{7} \end{cases}$$

El punto buscado es $P'' \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{4}{7} \right)$.

Problema 33 Determinar la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} 2x + z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \quad s : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$$

Solución:

El vector director de la recta r será:

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 2)$$

Un punto de la recta será (haciendo $x = 0$) $A_r(0, 1, 1)$, y tendremos:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 3, 2) \\ A_r(0, 1, 1) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, 1, -1) \\ A_s(1, 1, 0) \end{cases}$$

Calculamos el vector auxiliar $\overrightarrow{A_r A_s} = (1, 0, -1)$

$$|A| = |\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{A_r A_s}| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego las dos rectas se cruzan.

Problema 34 Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r :

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π :

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:

Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases} \quad \pi : \vec{u}_\pi = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_\pi = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases}$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 35 Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

Se pide:

1. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.
2. Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

1. Los vectores que nos proporciona el problema son: $\vec{AB} = (1, 1, 1)$ y $\vec{BC} = (-1, 1, 1)$.

Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\vec{BC} = \vec{AD} \implies (-1, 1, 1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$, el punto será $D(0, 2, 2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\vec{AB} \times \vec{BC}|$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2) \implies Area = |\vec{AB} \times \vec{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC}

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 1, 1)$

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1 + 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \implies \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 36 Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad x - 2y + 3z - 4 &= 0 \\ \pi_2 : \quad 2x + y + z + 1 &= 0 \\ \pi_3 : \quad -2x + 4y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \\ -2x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

Sean las matrices A y \overline{A} siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Pero podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \implies \text{Rango} A = 2$

Calculamos ahora el rango de \overline{A} , calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -40 \neq 0 \implies \text{Rango}\bar{A} = 3.$$

En conclusión $\text{Rango}A = 2 \neq \text{Rango}\bar{A} = 3$ y tendremos que compararlos dos a dos; comparamos π_1 y π_3 :

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-4}{0}$$

Esto quiere decir que π_1 y π_3 son paralelos, y por tanto, π_2 corta a los dos.

Problema 37 Dadas las rectas

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$s : \begin{cases} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 2y+ & z = & -1 \end{cases}$$

estudiar su posición en el espacio y calcular el ángulo que forman.

Solución:

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -i - 3j - 4k = (-1, -3, -4)$$

Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \implies \begin{cases} y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \implies P_s(0, 0, -1)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 2) \\ P_r(3, 2, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, -3, -4) \\ P_s(0, 0, -1) \end{cases}$$

Tomamos el vector $\vec{u} = \overrightarrow{P_r P_s} = (-3, -2, -2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\text{Rango}A = 2 \neq \text{Rango}\bar{A} = 3 \implies$ Las dos rectas se cruzan.

El ángulo que forman las dos rectas vendrá dado por

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{|-2 - 3 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 4} \sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{13}{3\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$$\cos \alpha = 0,8498365855 \implies \alpha = 31,80610002^\circ$$

Problema 38 Discute la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro m .

$$\begin{cases} \pi_1 : & x - y & = & 1 \\ \pi_2 : & 2x + 3y - 5z & = & -16 \\ \pi_3 : & x + my - z & = & 0 \end{cases}$$

Solución

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \implies |A| = 5m = 0 \implies m = 0$.

Si $m \neq 0$ tendremos que $|A| = 0$ por lo que $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $m = 0$ tendremos

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Si calculamos

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -16 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 13 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Además vemos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Por lo que podemos concluir en este caso que $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema es Incompatible.

Comparamos los planos dos a dos y tenemos:

π_1 y π_2 se cortan.

π_1 y π_3 se cortan.

π_2 y π_3 se cortan.

Se cortan los tres planos dos a dos.

Problema 39 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Calcular:

1. La posición relativa de ambas.
2. Un plano π que contenga a r y sea paralelo a s .

Solución:

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2i + 4j + 3k = (-2, 4, 3)$$

Para encontrar un punto de la recta r hacemos:

$$x = 0 \implies y = -1, \quad z = 0 \implies P_r(0, -1, 0)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 4, 3) \\ P_r(0, -1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ P_s(1, -1, 1) \end{cases}$$

1. Tomamos el vector $\vec{u} = \overline{P_r P_s} = (1, 0, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\text{Rango}A = 2 \neq \text{Rango}\overline{A} = 3 \implies$ Las dos rectas se cruzan.

- 2.

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 4, 3) \\ \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ P_r(0, -1, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} -2 & 2 & x \\ 4 & 1 & y+1 \\ 5 & -1 & z \end{vmatrix} = 9x - 8y + 10z - 8 = 0$$

Problema 40 Dada la recta $r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi : 3x + y - z - 1 = 0$. Se pide:

1. Comprobar que posición ocupa esta recta respecto a este plano.
2. En caso de corte, calcular el ángulo que ocupan.
3. Calcular la proyección ortogonal de esta recta sobre el plano.

Solución:

1. Ponemos la ecuación de la recta como intersección de dos plano:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} \implies x+y-1=0$$
$$\frac{x-1}{-1} = \frac{z-1}{2} \implies 2x+z-3=0$$
$$r : \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases} \quad \pi : 3x+y-z-1=0$$
$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A) = 3 \implies$ Sistema Compatible Determinado, es decir, se cortan en un punto.

- 2.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 2) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \quad \pi : \vec{u}_\pi = (3, 1, -1)$$
$$\sin \alpha = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi}{|\vec{u}_r| |\vec{u}_\pi|} = \frac{-4}{\sqrt{66}} \implies \alpha = -29.49620849^\circ$$

3. Se obtiene como intersección de dos planos, el plano dado π y el plano definido por:

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 2) \\ \vec{u}_\pi = (3, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} -1 & 3 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 2 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 3x-5y+4z-7=0$$

La proyección ortogonal será:

$$s : \begin{cases} 3x-5y+4z-7=0 \\ 3x+y-z-7=0 \end{cases}$$

Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases} \quad \pi : \vec{u}_\pi = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_\pi = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases}$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 41 Encontrar la recta que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$ y corta a las rectas r y s de ecuaciones

$$r : \begin{cases} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Determinar la posición que ocupan las dos rectas.

Solución:

Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -5, -7) \\ P_r(0, -5, -9) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 1) \\ P_s(3, 0, 1) \end{cases}$$

Donde hemos calculado

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -5, -7)$$

Si hacemos $x = 0$ obtenemos $P_r(0, -5, -9)$.

Para determinar la posición que ocupan necesitamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_r P_s} = (3, 5, 10)$ y tenemos que

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\overline{A}| = 54 \neq 0$$

Tenemos que $\text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 \implies$ las dos rectas se cruzan.

Ahora tenemos que calcular:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -5, -7) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (0, -5, -9) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (2, 0, 2) \\ P(1, 0, 1) \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -5 & -5 & y \\ -7 & -8 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies x + 3y - 2z - 3 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies x - z - 2 = 0$$

La recta que buscamos será

$$t : \begin{cases} x + 3y - 2z - 3 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Problema 42 Encontrar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P(1, 2, 1)$ y $Q(1, 2, 3)$, y al punto intersección de la recta r y el plano π cuyas ecuaciones son:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \pi : x + y + z = 0$$

Solución: El punto de intersección que buscamos será:

$$(1 + 2t) + (2 + 2t) + (1 - 2t) = 0 \implies t = -2 \implies S(-3, -2, 5)$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3) - (1, 2, 1) = (0, 0, 2) \\ \overrightarrow{PS} = (-3, -2, 5) - (1, 2, 1) = (-4, -4, 2) \\ P(1, 2, 1) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 0 & -4 & x-1 \\ 0 & -4 & y-2 \\ 2 & 4 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x - y + 1 = 0$$

Problema 43 Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π de ecuaciones

$$r : \begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \pi : x + y - z + 1 = 0$$

y calcular la proyección ortogonal de r sobre π .

Solución: Sean las matrices A y \overline{A}

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \implies |A| = -6 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \implies$ la recta r y el plano π se cortan.

La proyección ortogonal de r sobre π será la recta t , que vendrá determinada por la recta intersección del plano π y otro plano π' perpendicular a él que contenga a la recta r , esto es

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1, -2, 3) \\ P_r(0, 2, -1) \end{cases}$$

Donde

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 3)$$

Si $x = 0$ obtenemos que $P_r(0, 2, -1)$. Por tanto:

$$\pi' : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & -2 & y-2 \\ -1 & 3 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies x - 2y - z + 3 = 0$$

La recta t que buscamos tendrá de ecuación:

$$t : \begin{cases} x - 2y - z + 3 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Problema 44 (3 puntos) Se considera r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \text{ y el plano } \pi : x + y + z - 1 = 0.$$

1. Determinar las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta y cuya distancia al plano π sea igual que su distancia al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto?. Contestar razonadamente.
2. Calcular la distancia de $Q(1, 1, 1)$ a r y a π .

Solución:

1. Un punto cualquiera de r es de la forma $P(2t, t, 0)$, tendremos

$$d(P, \pi) = \frac{|2t + t - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|3t - 1|}{\sqrt{3}}$$

$$d(P, O) = \sqrt{(2t)^2 + t^2} = t\sqrt{5}$$

Como estas dos distancias son iguales, $d(P, \pi) = d(P, O)$ tendremos:

$$\frac{|3t - 1|}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5}$$

Como tenemos un valor absoluto, esta ecuación tiene dos soluciones:

$$\frac{3t - 1}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5} \implies t = \frac{1}{3 - \sqrt{15}}$$

$$\frac{3t - 1}{\sqrt{3}} = -t\sqrt{5} \implies t = \frac{1}{3 + \sqrt{15}}$$

Sustituyendo en P tenemos los puntos

$$\left(\frac{2}{3 - \sqrt{15}}, \frac{1}{3 - \sqrt{15}}, 0 \right) \quad \left(\frac{2}{3 + \sqrt{15}}, \frac{1}{3 + \sqrt{15}}, 0 \right)$$

2. Tenemos

$$d(Q, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 + 1 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Para calcular $d(Q, r)$ consideramos los datos de la recta r :

$\begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 0) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}$ construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rQ} = (1, 1, 1)$ y calculamos

$$\overrightarrow{P_rQ} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

Tenemos por tanto

$$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rQ} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Problema 45 (3 puntos) Se consideran las rectas r_1 y r_2 dadas por

$$r_1 : \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - 3z = 1 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Encontrar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto de intersección de r_2 con el plano $\pi : x - 3y - 2z + 7 = 0$

Solución:

El punto de intersección que buscamos será:

$$3t - 3(1 - 2t) - 2(2 + t) + 7 = 0 \implies t = 0 \implies Q(0, 1, 2)$$

Los datos de r_1 serán los siguientes

$$\vec{u}_{r_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -5, -5)$$

Si hacemos $x = 0$ obtenemos el punto $P_{r_1} \left(0, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (-5, -5, -5) \\ \overrightarrow{QP_{r_1}} = \left(0, -\frac{7}{5}, -\frac{11}{5}\right) \\ Q(0, 1, 2) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} -5 & 0 & x \\ -5 & -\frac{7}{5} & y - 1 \\ -5 & -\frac{11}{5} & z - 2 \end{vmatrix} = 0 \implies 4x - 11y + 7z - 3 = 0$$

Problema 46 (4 puntos) Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \alpha + t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{\alpha} = \frac{z-1}{-1}$$

1. Estudiar su posición relativa en función de α .
2. Si $\alpha = -1$, encontrar un plano paralelo a r y que contenga a s .

Solución:

1. Los datos que tenemos de r y s son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, \alpha, 2) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, \alpha, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

Construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_s P_r} = (0, \alpha, 1)$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \implies |\overline{A}| = -2 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \implies$ las dos rectas se cruzan independientemente del valor de α .

2. Cuando $\alpha = -1$ tenemos

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, 2) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -1, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

El plano π que buscamos vendrá definido por

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 1) \\ \vec{u}_s = (2, -1, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ 1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies y - z + 1 = 0$$

Problema 47 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

Calcular:

- su posición relativa y la distancia que las separa.
- la recta que es perpendicular a ambas.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-3, 1, -1) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases}$$

Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_s P_r} = (1, -2, 1)$, y tenemos

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \implies |\overline{A}| = -2 \neq 0$$

En conclusión $\text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 \implies$ las dos rectas se cruzan.

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_s P_r}$, \vec{u}_r y \vec{u}_s

$$|[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = |-2| = 2$$

Calculamos $|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2j + 2k = (0, 2, 2) \implies |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = 2\sqrt{2}$$

Tenemos, por tanto

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Obtenemos t , la recta perpendicular a r y a s , como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (0, 2, 2)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (-3, 1, -1) \\ \vec{u}_t = (0, 2, 2) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -3 & 0 & x-2 \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x+3y-3z-1=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{u}_t = (0, 2, 2) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y-2 \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2x+y-z-4=0$$

$$t : \begin{cases} 2x+ & 3y- & 3z- & 1 = 0 \\ 2x+ & y- & z- & 4 = 0 \end{cases}$$

Problema 48 Determine los puntos de la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$ que equidistan de los planos $\pi_1 : 3x + 4y = 1$ y $\pi_2 : 4x - 3z = 1$.

Solución:

Un punto genérico de la recta sería $P(1+2t, -1+3t, -2+2t)$

$$d(P, \pi_1) = \frac{|3(1+2t) + 4(-1+3t) - 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-2+18t|}{5}$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|4(1+2t) - 3(-2+2t) - 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|9+2t|}{5}$$

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \implies \begin{cases} -2+18t = 9+2t \implies t = \frac{11}{16} \\ -2+18t = -(9+2t) \implies t = -\frac{7}{20} \end{cases}$$

Tendríamos dos puntos:

$$P_1 \left(\frac{19}{8}, \frac{17}{6}, -\frac{5}{8} \right), \quad P_2 \left(\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10} \right)$$

Problema 49 Dados los puntos $A(2, 3, -1)$, $B(3, 3, 2)$ y $C(1, 4, 3)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Calcular la distancia de este plano al origen de coordenadas.
3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A , B , C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. Determinamos

$$\vec{AB} = (1, 0, 3), \quad \vec{AC} = (-1, 1, 4)$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{AB} = (1, 0, 3) \\ \vec{AC} = (-1, 1, 4) \\ A(2, 3, -1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 1 & y-3 \\ 3 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 3x + 7y - z - 28 = 0$$

2.

$$d(O, \pi) = \frac{|-28|}{\sqrt{9+49+1}} = \frac{28\sqrt{59}}{59} = 3,645289507 u$$

3.

$$V = \frac{1}{3}(\text{área base}) \cdot \text{altura} = \frac{1}{6}|[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]|$$

$$\vec{OA} = (2, 3, -1), \quad \vec{OB} = (3, 3, 2), \quad \vec{OC} = (1, 4, 3)$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-28| = \frac{14}{3} = 4,666 u^3$$

Problema 50 Se considera la recta

$$r : \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Se pide:

1. Determinar la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por $(0, 2, 2)$, y las coordenadas del punto P intersección de r y s .
2. Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y s , y la de la recta t perpendicular a π por el punto P .
3. Si Q es un punto cualquiera de t , sin hacer ningún cálculo, que relación hay entre las distancias de Q a r , de Q a s y de Q a π .

Solución:

1. Para calcular \vec{u}_r tenemos:

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

Haciendo $x = 0$ obtenemos $P_r(0, 1, 1)$ y tendremos

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ P_r(0, 1, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Un plano perpendicular a r sería $\pi' : x - y + z + \lambda = 0$ que por contener al punto $(0, 2, 2) \implies -2 + 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies \pi' : x - y + z = 0$

Buscamos el punto de intersección entre el plano π' y la recta r . Sustituimos r en π'

$$\lambda - (1 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0 \implies \lambda = 0 \implies P(0, 1, 1)$$

La recta s pasa por $P(0, 1, 1)$ y por $P_s(0, 2, 2)$:

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (0, 1, 1) \\ P(0, 1, 1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

2. Tenemos que π tiene que contener a r y s , y tenemos que

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ P_r(0, 1, 1) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (0, 1, 1) \\ P_s(0, 1, 1) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x + y - z = 0$$

La recta t es perpendicular π y pasa por el punto $P = P_r = P_s$, luego

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (2, 1, -1) \\ P_t(0, 1, 1) \end{cases} \implies t = \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

3. La recta t es perpendicular a r , a s y a π , además los tres se cortan en el punto P , luego si Q es un punto cualquiera de t , tendremos

$$d(Q, r) = d(Q, s) = d(Q, \pi)$$

Problema 51 Sea la ecuación de la recta r determinada por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, -1, -1)$; y sea la recta $s : \frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$.

Se pide:

1. Averiguar su posición relativa.
2. La distancia que las separa.
3. Perpendicular común a ambas rectas.
4. Hallar, si existe, una recta que pase por el punto $C(1, 2, 4)$ y que corte a r y a s .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u_r} = (0, -1, 0) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 5, 3) \\ P_s(3, 0, 0) \end{cases}$$

Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_r P_s} = (2, 0, 1)$, y tenemos

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |\overline{A}| = -4 \neq 0$$

En conclusión $\text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 \implies$ las dos rectas se cruzan.

2. Calculamos $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3i + 2k = (-3, 0, 2) \implies |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \sqrt{13}$$

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_r P_s}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$

$$|[\overrightarrow{P_r P_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |-4| = 4$$

Tenemos, por tanto

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

3. Obtenemos t , la recta perpendicular a r y a s , como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (-3, 0, 2)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_t} = (-3, 0, 2) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -3 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y \\ 2 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x-3z-1=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 5, 3) \\ \overrightarrow{u_t} = (-3, 0, 2) \\ P_s(3, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -3 & 2 & x-3 \\ 0 & 5 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 10x-13y+15z-30=0$$

$$t : \begin{cases} 2x & - & 3z & - & 1 = 0 \\ 10x & -13y & + & 15z & - & 30 = 0 \end{cases}$$

4. Obtenemos h , la recta que corta a r y a s y pasa por $C(1, 2, 4)$, como intersección de dos planos.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, -1, 0) \\ \vec{P}_r\vec{C} = (0, 2, 5) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 5 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies x-1=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 5, 3) \\ \vec{P}_s\vec{C} = (-2, 2, 4) \\ P_s(3, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 2 & -2 & x-3 \\ 5 & 2 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x-y+z-3=0$$

$$t : \begin{cases} x-1=0 \\ x-y+z-3=0 \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 52 Dados los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$ y $C(-1, 2, -1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A , B , C y el origen de coordenadas O .
3. Calcular la altura del tetraedro que va desde el origen de coordenadas a la cara de vértices ABC .
4. Calcular la altura del triángulo OAB , la que va desde el vértice O al segmento \overline{AB} .

Solución:

1. Determinamos

$$\overline{AB} = (0, 0, 2), \quad \overline{AC} = (-3, 1, -2)$$

$$\pi : \begin{cases} \overline{AB} = (0, 0, 2) \\ \overline{AC} = (-3, 1, -2) \\ A(2, 1, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 0 & -3 & x-2 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 2 & -2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : x + 3y - 5 = 0$$

- 2.

$$V = \frac{1}{3}(\text{área base}) \cdot \text{altura} = \frac{1}{6} |[\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}]|$$

$$\overline{OA} = (2, 1, 1), \quad \overline{OB} = (2, 1, 3), \quad \overline{OC} = (-1, 2, -1)$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-10| = \frac{5}{3} = 1,666 u^3$$

3. Área de la base = $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, -6, 0) \implies \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{10}$$

$$V = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \cdot h \implies h = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1,58113883 u$$

$$d(O, \pi) = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1,58113883 u$$

4. LLamo r a la recta que une AB :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (0, 0, 2) \\ P_r = A(2, 1, 1) \end{cases}$$

Obtenemos el vector auxiliar $\overrightarrow{OA} = (2, 1, 1)$ y hacemos

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 4, 0)$$

$$d(O, r) = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5} u$$

Problema 53 Consideramos el punto $P(5, -2, 9)$ y la recta $r : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{6}$.

Calcular:

1. Distancia de P a r .
2. Ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y que pasa por P
3. Calcular el punto de corte T entre las rectas r y s .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, -3, 6) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r P} = (4, -1, 9)$$

$$\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = (-21, 14, 42)$$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r| = \sqrt{(-21)^2 + 14^2 + 42^2} = 49, \quad |\vec{u}_r| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{49}{7} = 7$$

2. Ponemos la recta r en paramétricas $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 6t \end{cases}$.

Luego el punto T de s y de r será en forma genérica $T(1-2t, -1-3t, 6t)$.

El vector $\overrightarrow{PT} = (-4 - 2t, 1 - 3t, -9 + 6t)$ es perpendicular \vec{u}_r y, por tanto, el producto escalar de ambos será cero

$$\overrightarrow{PT} \cdot \vec{u}_r = 0 \implies t = 1 \implies \overrightarrow{PT} = \vec{u}_s = (6, 2, 3)$$

La recta que buscamos es

$$s : \frac{x - 5}{6} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 9}{3}$$

3. Por el apartado anterior tenemos $T(-1, -4, 6)$

Problema 54 Sabemos que las siguientes rectas se cortan en un punto. Hallar el valor de k y la ecuación en forma general del plano que determinan.

$$r : \frac{x + 1}{2} = \frac{y + k}{3} = \frac{z - 1}{-2}$$

$$s : \frac{x}{1} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z - k}{3}$$

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, -2) \\ P_r(-1, -k, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, 3) \\ P_s(0, -3, k) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (1, -3 + k, k - 1)$$

Tenemos

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & +k \end{pmatrix} \implies |\overline{A}| = -7k + 36 = 0 \implies k = \frac{36}{7}$$

Si $k \neq \frac{36}{7} \implies \text{Rango } \overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2$, y en este caso las rectas se cruzan.

Si $k = \frac{36}{7} \implies \text{Rango} \bar{A} = 2 = \text{Rango}(A)$, y en este caso las rectas se cortan.

En este último caso, el plano que las contiene será:

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, 3) \\ \vec{u}_r = (2, 3, -2) \\ P_s(0, -3, 36/7) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y+3 \\ 3 & -2 & z-36/7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi : 91x - 56y + z + 204 = 0$$

Problema 55 Sea el plano $\pi : x - 2y + 4z = 12$ y el punto $P(2, -1, 1)$.

1. Calcular la distancia $d(P, \pi)$.
2. Hallar la ecuación de un plano paralelo a π y distinto del mismo, que también diste de P la misma distancia d .
3. Calcular el volumen de la figura limitada por el plano π y los tres planos coordenados.

Solución

1.

$$d(P, \pi) = \frac{2 - 2(-1) + 4 \cdot 1 - 12}{\sqrt{1 + 4 + 16}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

2.

$$\pi' : x - 2y + 4z + \lambda = 0$$

$$d(P, \pi') = \frac{|2 + 2 + 4 + \lambda|}{\sqrt{21}} = \frac{|8 + \lambda|}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \implies |8 + \lambda| = 4$$

$$8 + \lambda = 4 \implies \lambda = -4 \implies \pi' : x - 2y + 4z - 4 = 0$$

Cuando tomamos $8 + \lambda = -4 \implies \lambda = -12$ que es el plano π .

3. Corte del plano π con el eje OX :

Hacemos $y = 0$ y $z = 0$, obtenemos el punto $A(12, 0, 0)$.

Corte del plano π con el eje OY :

Hacemos $x = 0$ y $z = 0$, obtenemos el punto $B(0, -6, 0)$.

Corte del plano π con el eje OZ :

Hacemos $x = 0$ y $y = 0$, obtenemos el punto $C(0, 0, 3)$.

$$\vec{OA} = (12, 0, 0), \quad \vec{OB} = (0, -6, 0), \quad \vec{OC} = (0, 0, 3)$$

$$[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -216$$

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{216}{6} = 36 u^2$$

Problema 56 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, \quad s : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

Calcular:

1. su posición relativa y la distancia que las separa.
2. la recta que es perpendicular a ambas.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases}$$

Tomamos el vector auxiliar $\vec{P_r P_s} = (-2, 1, 0)$, y tenemos

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies |\bar{A}| = -5 \neq 0$$

En conclusión $\text{Rango}(\bar{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 \implies$ las dos rectas se cruzan.

Calculamos el producto mixto de $\vec{P_r P_s}$, \vec{u}_r y \vec{u}_s

$$|[\vec{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]| = \left| \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = |-5| = 5$$

Calculamos $|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - j - 3k = (2, -1, -3) \implies |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{14}$$

Tenemos, por tanto

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{14}$$

2. Obtenemos t , la recta perpendicular a r y a s , como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (2, -1, -3)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -1) \\ \vec{u}_t = (2, -1, -3) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 4x+5y+z-4=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ \vec{u}_t = (2, -1, -3) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 2 & 2 & x+1 \\ 1 & -1 & y-1 \\ 1 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x-4y+2z+5=0$$

$$t : \begin{cases} 4x+ & 5y+ & z- & 4 = 0 \\ x- & 4y+ & 2z+ & 5 = 0 \end{cases}$$

Problema 57 1. Calcula el área de un triángulo de vértices $A(3, 1, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(4, 1, -1)$.

2. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi : x - y - z - 1 = 0$ con la recta $s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = z$ y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ 3x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución:

- 1.

$$\vec{AB} = (-1, -1, -1); \vec{AC} = (1, 0, -1)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(1, -2, 1)| = \sqrt{6}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

2. Calculamos la intersección de π y la recta s :

$$s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \implies 2t - (1 + 2t) - t - 1 = 0 \implies t = -2 \implies P(-4, -3, -2)$$

La recta pedida pasará por este punto y tendrá como vector director

$$\vec{u} = (2, -1, 0) \times (3, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 5)$$

La recta pedida es

$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{5}$$

Problema 58 Discutir la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro a .

$$\begin{cases} \pi_1 : & -x + 2y + z = 0 \\ \pi_2 : & ay + 4z = 8 \\ \pi_3 : & 4y + az = 8 \end{cases}$$

Solución

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 4 & 8 \\ 0 & 4 & a & 8 \end{array} \right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \implies |A| = -(a^2 - 16) = 0 \implies a = 4, a = -4$.

Si $a \neq 4$ y $a \neq -4$ tendremos que $|A| \neq 0$ por lo que $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $a = 4$ tendremos

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{array} \right)$$

Vemos que tiene dos filas iguales, y además $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Por lo que podemos concluir en este caso que $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < n^\circ$ incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado. Los planos π_2 y π_3 son coincidentes, y el plano π_1 los corta en una recta.

Si $a = -4$ tendremos:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array} \right)$$

Primero tenemos que $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, por lo que $\text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 64 \neq 0$$

tenemos que $\text{Rango}(\bar{A}) = 3$

En este caso, por tanto, $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3$. El sistema es Incompatible y para ver la posición de los planos los comparamos dos a dos. Vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos, y el plano π_1 los corta a los dos.

Problema 59 Dados los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 4, 2)$ y $C(1, 3, 1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Calcular la distancia de este plano al origen de coordenadas.
3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A , B , C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. Determinamos

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 2)$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 2, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 2) \\ A(1, 2, -1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & 0 & x-1 \\ 2 & 1 & y-2 \\ 3 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : x - 4y + 2z + 9 = 0$$

- 2.

$$d(O, \pi) = \frac{|9|}{\sqrt{1+16+4}} = \frac{9\sqrt{21}}{21} = 1,963961012 u$$

- 3.

$$V = \frac{1}{3}(\text{área base}) \cdot \text{altura} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$$

$$\overrightarrow{OA} = (1, 2, -1), \quad \overrightarrow{OB} = (3, 4, 2), \quad \overrightarrow{OC} = (1, 3, 1)$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-9| = \frac{3}{2} = 1,5 u^3$$