Problemas de Geometría (Matemáticas 2º)

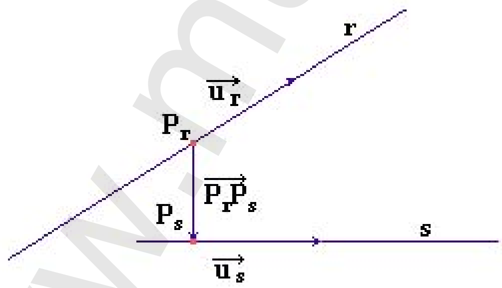
Problema 1 Se consideran las rectas:

$$r: \ \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-\alpha}{-1}$$
$$s: \ \frac{x+1}{3} = y-2 = z$$

1. Analizar en función de α la posición relativa de las dos rectas.
2. Para $\alpha = 14$ escribir la ecuación del plano π que contiene a ambas rectas.
3. Hallar la perpendicular común a las rectas s y t siendo t la siguiente recta:

$$t: \ x = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$$

Solución:



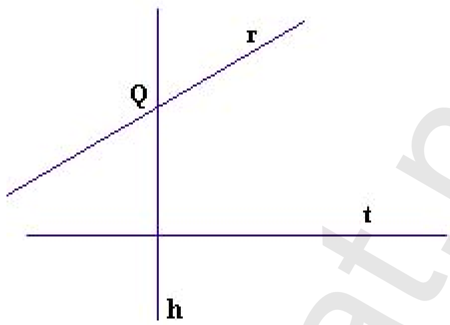
$$r: \left\{ \begin{array}{l} P_r(1,0,\alpha) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,1,-1) \end{array} \right. \qquad s: \left\{ \begin{array}{l} P_s(-1,2,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (3,1,1) \end{array} \right.$$

1. Vamos a ver para que valores de α los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$ son linealmente independientes.

$$\left| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -\alpha \end{array} \right| = \alpha - 14 = 0 \Longrightarrow \alpha = 14$$

Si $\alpha \neq 14$ el determinante es distinto de cero, lo que quiere decir que los tres vectores son linealmente independientes, y por tanto, las dos rectas se cruzan.

Si $\alpha = 14$ el determinante es cero y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ esto quiere decir que $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes, y por tanto, $\overrightarrow{P_rP_s}$ depende linealmente de $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, en conclusión las rectas r y s se cortan.



2. Replanteamos datos:

$$t: \begin{cases} P_t(0,0,0) \\ \overrightarrow{v_t} = (1,2,-2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s(-1,2,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (3,1,1) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{P_sP_t} = (1,-2,0)$$

Veamos que posición relativa tienen s y t:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Longrightarrow \text{las dos rectas se cruzan.}$$

Tenemos que calcular la recta h perpendicular común a s y t, es decir, una recta cuyo vector director vendría determinado por:

$\overrightarrow{v_h} = \overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{v_t}$

$$\overrightarrow{v_h} = \overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{v_t} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4,7,5)$$

Ahora hallamos el plano π, que conteniendo a t es perpendicular a la recta s. Este plano y la recta s se cortarán en un punto Q.

Para construir π tenemos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_h} = (-4,7,5) \\ \overrightarrow{v_t} = (1,2,-2) \\ P_t(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} -4 & 1 & x-0 \\ 7 & 2 & y-0 \\ 5 & -2 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 8x + y + 5z = 0; \quad s : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora buscamos el punto de corte:

$8(-1 + 3\lambda) + (2 + \lambda) + 5\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{5}$

Luego el punto Q será: $\begin{cases} x = -1 + 3 \cdot \frac{1}{5} \\ y = 2 + \frac{1}{5} \\ z = \frac{1}{5} \end{cases}$ Es decir: $Q(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}, \frac{1}{5})$

Tenemos por tanto: $h = \begin{cases} Q(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}, \frac{1}{5}) \\ \overrightarrow{v_h} = (-4, 7, 5) \end{cases}$

Por lo que concluiremos:

$$h : \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 4 \cdot \lambda \\ y = \frac{11}{5} + 7 \cdot \lambda \\ z = \frac{1}{5} + 5 \cdot \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Se considera la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$r : \begin{cases} x = & 2t \\ y = & t \\ z = & 0 \end{cases}$ y el plano $\pi :\ x + y + z - 1 = 0$

Determinar las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta y cuya distancia al plano π sea igual que su distancia al origen de coordenadas. ¿Es único este punto?. Contestar razonadamente.

Solución:
LLamaríamos $O(0, 0, 0)$ al origen de coordenadas, y $P(x, y, z)$ a un punto que por estar sobre la recta r tendría de coordenadas $P(2t, t, 0)$; aplicando las fórmulas de distancia a un plano, y distancia a otro punto tendremos:

$$d(O, P) = \sqrt{(2t)^2 + t^2} = \sqrt{4t^2 + t^2} = t\sqrt{5}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|2t \cdot 1 + t \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|2t + t - 1|}{\sqrt{3}}$$

Como $d(O, P) = d(P, \pi) \implies t\sqrt{5} = \frac{|3t-1|}{\sqrt{3}} \implies$

$$\begin{cases} t\sqrt{5} = & \frac{3t-1}{\sqrt{3}} \implies t = \frac{1}{3-\sqrt{15}} \\ t\sqrt{5} = & -\frac{3t-1}{\sqrt{3}} \implies t = \frac{1}{3+\sqrt{15}} \end{cases}$$

Sustituyendo t en r se obtienen los puntos pedidos:

$$P\left(\frac{2}{3-\sqrt{15}}, \frac{1}{3-\sqrt{15}}, 0\right) \text{ y } P'\left(\frac{2}{3+\sqrt{15}}, \frac{1}{3+\sqrt{15}}, 0\right)$$

Esta claro que el punto no es único, ya que como hemos visto son dos los que cumplen la condición del problema.

Problema 3 Se consideran las rectas r_1 y r_2 dadas por:

$$r_1: \left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & 3y+ & z = & 1 \end{array} \right. \quad r_2 =: \left\{ \begin{array}{rrr} x = & & 3t \\ y = & 1- & 2t \\ z = & 2+ & t \end{array} \right.$$

Encontrar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto de intersección de r_2 con el plano $\pi = x - 3y - 2z + 7 = 0$

Solución

Hallamos el punto de corte entre π y r_2 por simple sustitución, es decir, $3t - 3(1-2t) - 2(2+t) + 7 = 0 \Longrightarrow t = 0$ y sustituyendo ahora este valor en r_2 obtendríamos el punto $P(0, 1, 2)$.

Ahora vamos a pasar la recta r_1 a paramétricas:

$$r_1: \left\{ \begin{array}{rrl} x+ & y- & 2z = 0 \\ 2x- & 3y+ & z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} x+ & y = & 2t \\ 2x- & 3y = & 1-t \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rr} 2x + 2y = & 4t \\ 2x - 3y = & 1-t \end{array} \right. \Longrightarrow 5y = 5t - 1 \Longrightarrow y = \frac{5t-1}{5}$$

$$x = 2t - \frac{5t-1}{5} = \frac{5t+1}{5}$$

Nos quedaría:

$$r_1: \left\{ \begin{array}{rrr} x = & \frac{1}{5} & +t \\ y = & -\frac{1}{5} & +t \\ z = & & t \end{array} \right. \quad r_1: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (1, 1, 1) \\ P_r(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0) \end{array} \right.$$

Calculamos ahora $\overrightarrow{P_rP} = (0 - \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5}, 2 - 0) = (-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, 2)$.

El plano buscado lo obtendríamos con los siguientes datos:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0, 1, 2) \\ \overrightarrow{u} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_rP} = (-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, 2) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & -\frac{1}{5} & x - 0 \\ 1 & \frac{6}{5} & y - 1 \\ 1 & 2 & z - 2 \end{array} \right| = 4x - 11y + 7z - 3 = 0$$

Problema 4 Sean r la recta determinada por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, -1, -1)$ y s la recta de ecuaciones: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$.

Se pide:

1. Su posición relativa.

2. Hallar, si existe, una recta que pase por el punto $C = (1, 2, 4)$ y que corte a las rectas r y s.

Solución:

1. La recta r pasa por los puntos A y B, para construirla calculamos el vector director de ella $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0)$
   Vamos a escribir las dos rectas en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \\ z = -1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

   Los vectores directores de ambas rectas no son paralelos, $\overrightarrow{u_r} = (0, -1, 0)$ y $\overrightarrow{u_s} = (2, 5, 3)$. Lo que quiere decir que, o bien se cortan o bien se cruzan. Vamos a resolverlo mediante un sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 3 + 2\lambda = 1 & (1) \\ 5\lambda = -1 - t & (2) \\ 3\lambda = -1 & (3) \end{array}\right\} \text{Despejando } \lambda \text{ de (1) y (3) tenemos:}$$

   De (1) $\Longrightarrow \lambda = -1$

   De (3) $\Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$

   Como los dos valores de λ son diferentes, concluimos con que las dos rectas se cruzan.

2. Si construimos el plano π_1 determinado por la recta r y el punto C, y construimos el plano π_2 determinado por la recta s y el punto C. Por tanto, la recta pedida sería la intersección de estos dos planos.

   - Calculamos π_1:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{AC} = (0, 2, 5) \\ A(1, 0, -1) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 0 & x - 1 \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 5 & z + 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -5(x-1) = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - 1 = 0$$

   - Calculamos π_2:

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_s} = (2, 5, 3) \\ \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{PC} = (-2, 2, 4) \\ P(3, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -2 & x-3 \\ 5 & 2 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : x - y + z - 3 = 0$$

Ahora resolvemos el sistema formado por ambos planos, para comprobar que se trata de una recta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = x + z - 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Que sería la recta que nos piden.

Problema 5 Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \;\; ; \;\; C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

1. Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

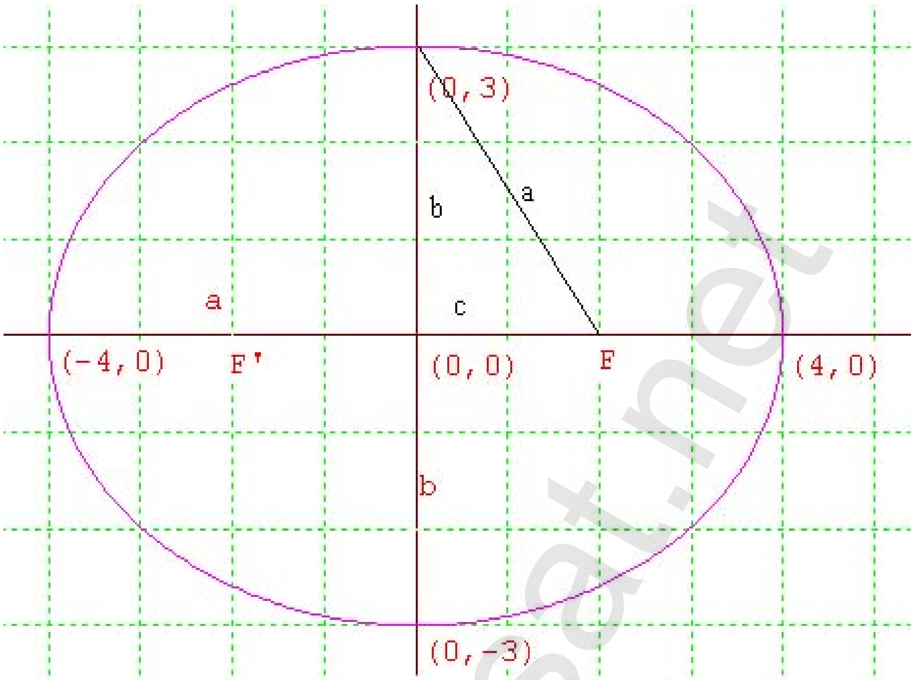
2. Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Solución:

1. $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.
   Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.
   Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
   Podemos concluir:

   - Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
   - Vértices: $(-4, 0)$ $(0, 3)$ $(0, -3)$ $(4, 0)$
   - Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
   - Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.

   $C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.
   Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{16 + 9} = 5$
   Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$
   Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$



Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0,0)$ las rectas buscadas serían:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

Podemos concluir:

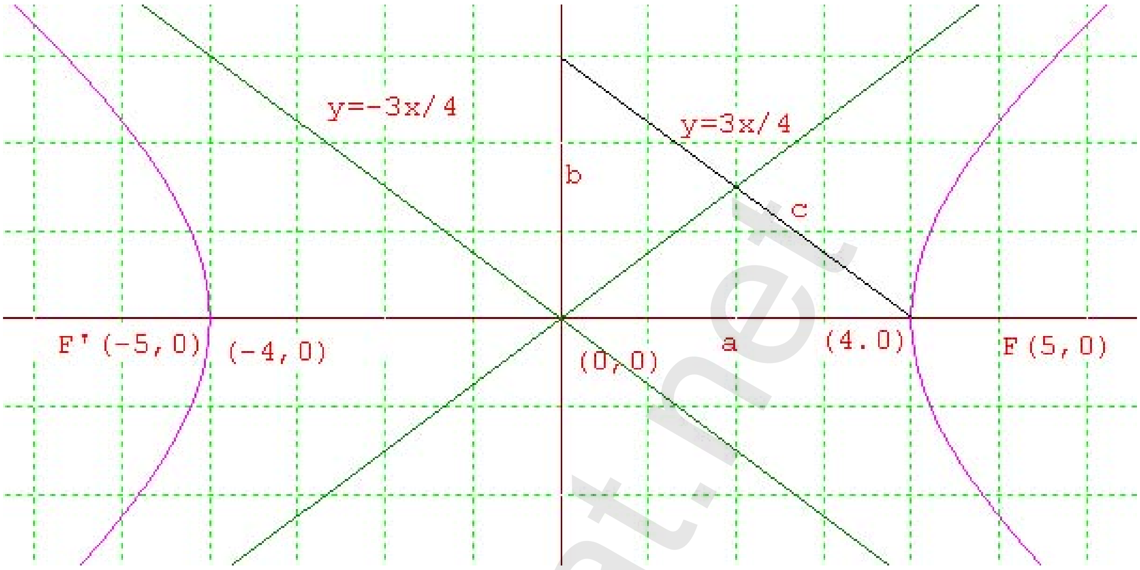
- Focos: $(-5,0) \quad (5,0)$
- Vértices: $(-4,0) \quad (4,0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:

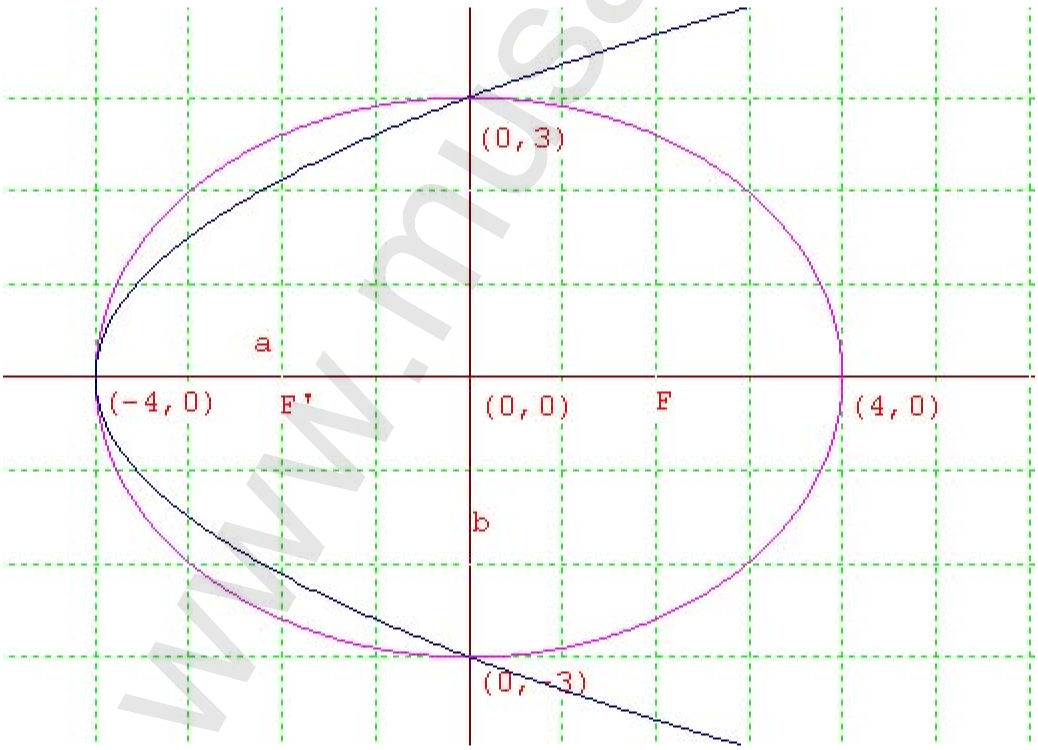
$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

2. La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abcisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.

   Como pasa por el vértice $(-4,0), (0,3), (0,-3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -4 = & & & c \\ 0 = & 9a+ & 3b+ & c \\ 0 = & 9a- & 3b+ & c \end{array}\right. \Longrightarrow c = -4,\ a = \frac{4}{9}\ y\ b = 0 \Longrightarrow x = \frac{4}{9}y^2 - 4$$





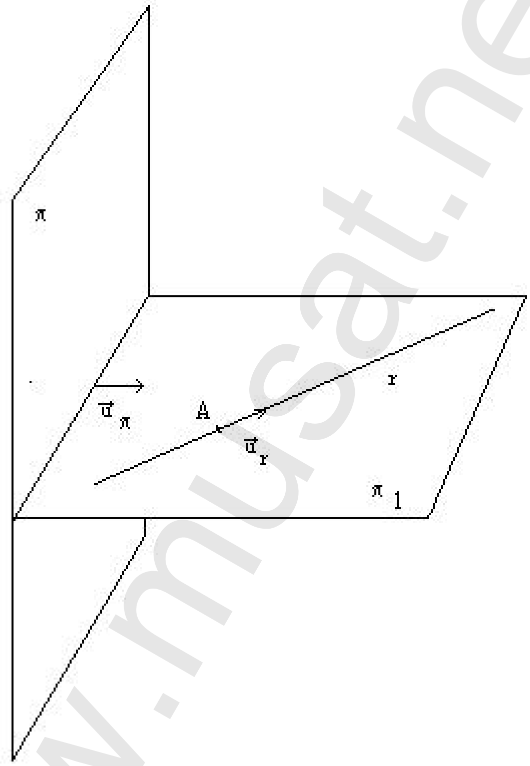
Problema 6 Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:



$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ A(1,-1,0) \end{cases} \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1) \\ A(1,-1,0) \end{cases}$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

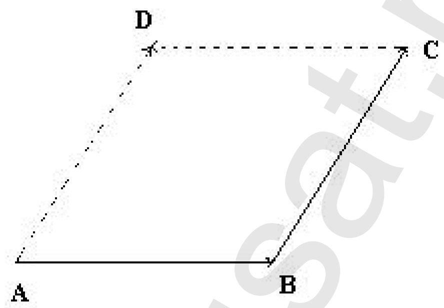
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 7 Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

1. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

2. Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:



1. Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1,1,1)$.
   Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (-1,1,1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ $z_0 = 2$, el punto será $D(0,2,2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-2,2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

   Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 1, 1)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1 + 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 8 Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases} \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases}$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x - 1 \\ 2 & 1 & y + 1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 9 Los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(2, 1, 3)$, $C(2, 3, -1)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

1. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

2. Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

1. Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 3)$ y $\overrightarrow{BC} = (0, 2, -4)$.
   Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (0, 2, -4) = (x_0-1, y_0-1, z_0)$ y por tanto $x_0 = 1,\ y_0 = 3\ z_0 = -4$, el punto será $D(1, 3, -4)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-6, 4, 2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{14}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 0 + 9} = \sqrt{10} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0 + 4 + 16} = \sqrt{20}$$

   Es decir, los lados del paralelogramo no son iguales, y por tanto, sólo queda por comprobar si es un rectángulo, para comprobarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un rectángulo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 3)$ y $\overrightarrow{AD} = (0, 2, -4)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{200}} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

   no es rectángulo.

Problema 10 Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & x- & 2y+ & 3z & -4=0 \\ \pi_2: & 2x+ & y+ & z & +1=0 \\ \pi_3: & -2x+ & 4y- & 6z & =0 \end{array}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & 3z & -4=0 \\ 2x+ & y+ & z & +1=0 \\ -2x+ & 4y- & 6z & =0 \end{array}\right.$$

Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Pero podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}A = 2$

Calculamos ahora el rango de $\overline{A}$, calculamos el determinante
$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -40 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3.$

En conclusión $\text{Rango}A = 2 \neq \text{Rango}\overline{A} = 3$ y tendremos que compararlos dos a dos; comparamos π_1 y π_3:

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-4}{0}$$

Esto quiere decir que π_1 y π_3 son paralelos, y por tanto, π_2 corta a los dos.

Problema 11 Probar que las rectas

$r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$

$s: \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y- & z = & 1 \\ 2x- & 2y+ & z = & -1 \end{array} \right.$

se cortan en un punto y calcular el ángulo que forman.

Solución:
Calculamos el vector director de la recta s:

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3i - 3j = (-3, -3, 0) = -3(1, 1, 0)$$

Calculamos un punto de s, para ello hacemos $x = 0$, y obtenemos $P_2(0, 0, 1)$. En resumen, podemos escribir lo siguiente:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} P_1(3, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} P_1(0, 0, -1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 0) \end{array} \right.$$

Calculamos un vector $\overrightarrow{P_2P_1} = (3, 2, 2)$ y construimos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como el rango de A es dos, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y además $|\overline{A}| = 0$ podemos concluir que Rango$A$ =Rango$\overline{A} = 2$, luego las dos rectas se cortan.

$$\cos\alpha = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+1+0}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \alpha = 45^{\text{o}}$$

Problema 12 Hallar la ecuación de los planos paralelos al plano $2x+y-z=2$ y estén a una distancia $d=3$ de él.
Solución:
Sea el punto $P(x,y,z)$, si este punto está a una distancia $d=3$ del plano dado debe de cumplir que

$$\frac{|2x+y-z-2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = 3 \Longrightarrow |2x+y-z-2| = 3\sqrt{6}$$

Obtendremos dos planos:

$$\pi_1 : 2x+y-z-2 = -3\sqrt{6} \Longrightarrow 2x+y-z-2+3\sqrt{6} = 0 \Longrightarrow 2x+y-z+5.348469228 = 0$$

$$\pi_2 : 2x+y-z-2 = 3\sqrt{6} \Longrightarrow 2x+y-z-2-3\sqrt{6} \Longrightarrow 2x+y-z-9.348469228 = 0$$

Problema 13 Calcular una recta que sea perpendicular a las siguientes rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrl} 2x- & y+ & z=1 \\ x+ & 2y- & z=2 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -i + 3j + 5k = (-1,3,5)$$

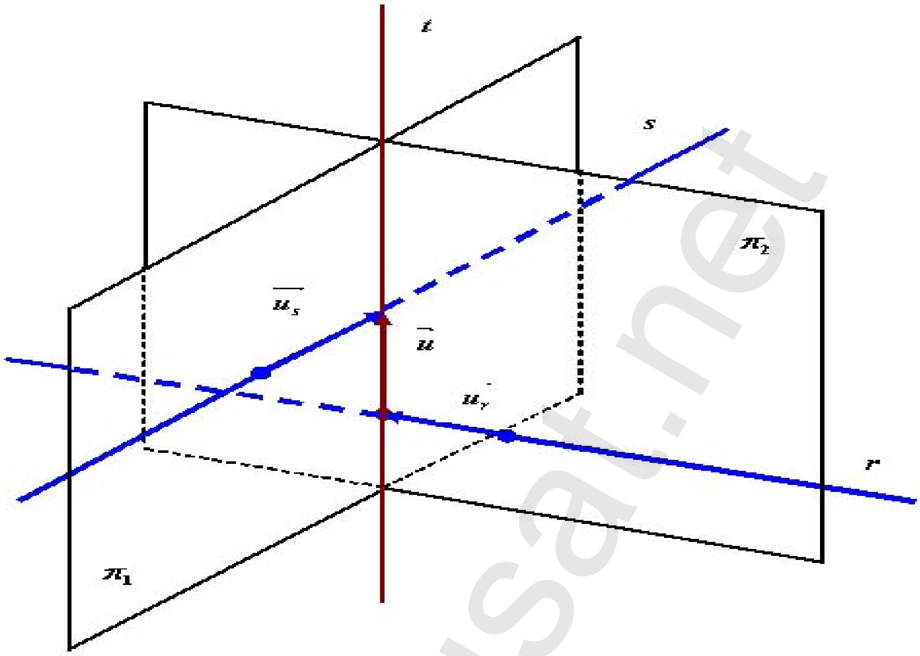
Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y+z=1 \\ 2y-z=2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=3 \\ z=4 \end{array} \right. \Longrightarrow P_s(0,3,4)$$

Tenemos, por tanto

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-1,1) \\ P_r(1,0,-1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,3,5) \\ P_s(0,3,4) \end{array} \right.$$

La recta t que buscamos será la intersección de dos planos π_1 y π_2. Para encontrarlos buscamos un vector que sea perpendicular a los dos vectores



directores de las rectas dadas, es decir, el producto vectorial de ambos vectores

$$\overrightarrow{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-8i-11j+5k=(-8,-11,5)$$

$$\pi_1:\begin{cases}\overrightarrow{u}=(-8,-11,5)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,3,5)\\ P_s(0,3,4)\end{cases}\qquad \pi_2:\begin{cases}\overrightarrow{u}=(-8,-11,5)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,-1,1)\\ P_r(1,0,-1)\end{cases}$$

$$\pi_1=\begin{vmatrix} -8 & -1 & x \\ -11 & 3 & y-3 \\ 5 & 5 & z-4 \end{vmatrix}=-70x-45y+13z+83=0$$

$$\pi_2=\begin{vmatrix} -8 & 2 & x-1 \\ -11 & -1 & y \\ 5 & 1 & z+1 \end{vmatrix}=-6x+2y+14z+20=0$$

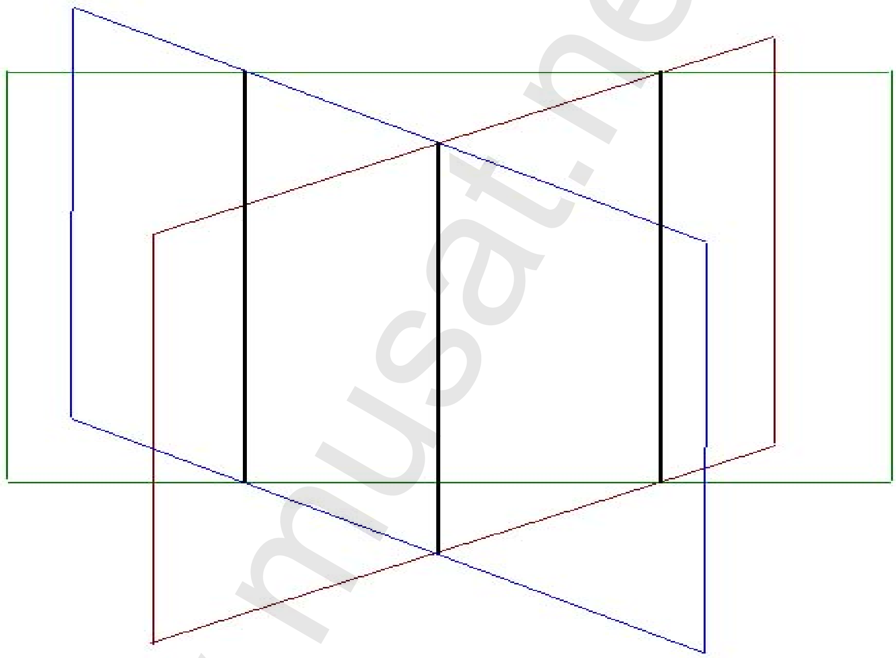
La recta buscada será:

$$h:\begin{cases}-70x- & 45y+ & 13z+ & 83=0\\ -6x+ & 2y+ & 14z+ & 20=0\end{cases}$$

Problema 14 Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & x- & 2y+ & 3z & -4=0 \\ \pi_2: & 2x+ & y+ & z & +1=0 \\ \pi_3: & -3x+ & y- & 4z & -3=0 \end{array}$$

Solución:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $|A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

En conclusión Rango$(A) = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3$, luego no hay soluciones comunes para los tres plano, y tendremos que compararlos dos a dos:

Comparamos π_1 con π_2: $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-2}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

Comparamos π_1 con π_3: $\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{-2}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

Comparamos π_2 con π_3: $\dfrac{2}{-3} \neq \dfrac{1}{1}$, luego estos dos planos se cortan.

En conclusión, los planos se cortan dos a dos.

Problema 15 Dadas las rectas

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$
$$s : \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1 \\ 2x- & 2y+ & z= & -1 \end{array} \right.$$

estudiar su posición en el espacio y calcular el ángulo que forman.
Solución:

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right| = -i - 3j - 4k = (-1, -3, -4)$$

Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow P_s(0, 0, -1)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \\ P_r(3, 2, 1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -3, -4) \\ P_s(0, 0, -1) \end{array} \right.$$

Tomamos el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_rP_s} = (-3, -2, -2)$

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Tenemos que Rango$A = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3 \Longrightarrow$ Las dos rectas se cruzan.

El ángulo que forman las dos rectas vendrá dado por

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-2-3-8|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+9+16}} = \frac{13}{3\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$$\cos\alpha = 0,8498365855 \Longrightarrow \alpha = 31,80610002^{\text{o}}$$

Problema 16 La recta

$$r : \begin{cases} x = & -2+ & 3t \\ y = & 4- & 2t \\ z = & -6+ & 5t \end{cases}$$

corta al plano $\pi_1 : x - y - 2z = 1$ en el punto A y al plano $\pi_2 : x + y - z = 0$ en el punto B. Si O es el origen de coordenadas

1. Hallar el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

2. Hallar el área del triángulo OAB

Solución:
Cálculo del punto A:
Sustituimos r en el plano π_1 y nos queda
$(-2+3t)-(4-2t)-2(-6+5t) = 1 \Longrightarrow\ t = 1$ y sustituyendo en r obtenemos:

$$\begin{cases} x = & -2+ & 3 \\ y = & 4- & 2 \\ z = & -6+ & 5 \end{cases} \Longrightarrow A(1, 2, -1)$$

Cálculo del punto B:
Sustituimos r en el plano π_2 y nos queda
$(-2+3t)-(4-2t)-(-6+5t) = 0 \Longrightarrow\ t = 2$ y sustituyendo en r obtenemos:

$$\begin{cases} x = & -2+ & 6 \\ y = & 4- & 4 \\ z = & -6+ & 10 \end{cases} \Longrightarrow B(4, 0, 4)$$

1. Cálculo de $\overrightarrow{OA}$:

   $$\overrightarrow{OA} = (1, 2, -1) - (0, 0, 0) = (1, 2, -1)$$

   Cálculo de $\overrightarrow{OB}$:

   $$\overrightarrow{OB} = (4, 0, 4) - (0, 0, 0) = (4, 0, 4)$$

   Si α es el ángulo que forman $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ tendremos

   $$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{|1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4|}{\sqrt{1 + 4 + 1} \cdot \sqrt{16 + 0 + 16}} = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$$

   Los dos vectores son perpendiculares.

2. Área$= \dfrac{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}{2} = \dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{32}}{2} = 4\sqrt{3}$

Problema 17 Calcular una recta que pase por el punto $(1, 0, 1)$ que sea paralela al plano π_1 de ecuación $\pi_1 : x - 2y + z = 1$ y que también sea paralela al plano π_2 que pasa por los puntos de coordenadas $(2, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$ y $(1, -1, 0)$

Solución:

Si r es paralela a π_1 y a π_2 es que es paralela a la intersección de los dos planos.

Calculamos primero el plano π_2:

$$\pi_2 = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, 1) - (2, 0, 1) = (-2, 2, 0) \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (1, -1, 0) - (2, 0, 1) = (-1, -1, -1) \\ A(2, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{ccl} -2 & -1 & x-2 \\ 2 & -1 & y \\ 0 & -1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x + y - 2z = 0$$

La recta s viene definida por la intersección de dos planos

$$s : \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & 1 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \end{array} \right.$$

Para calcular una recta que sea paralela a s calculamos su vector director.

Vector normal del plano π_1 es $\overrightarrow{v_1} = (1, -2, 1)$

Vector normal del plano π_2 es $\overrightarrow{v_2} = (1, 1, -2)$

El vector director de la recta s será $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ producto vectorial.

$$\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left| \begin{array}{ccr} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right| = 3i + 3j + 3k = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$$

La recta pedida tiene como vector director $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$:

$$s : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1 + t \\ y = & t \\ z = & 1 + t \end{array} \right. \Longrightarrow \quad x - 1 = y = z - 1$$

Problema 18 Consideremos un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$, siendo $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 1)$, $C(2, 4, 1)$ y $E(1, 2, 7)$. Hallar el área de una de las bases, el volumen del paralelepípedo y la distancia entre sus bases.

Solución:

Igualdades:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$$

Área de la base$= |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}|$
$\overrightarrow{AB} = (2,1,1) - (1,1,1) = (1,0,0)$
$\overrightarrow{BC} = (2,4,1) - (2,1,1) = (0,3,0)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3k = (0,0,3)$$

Área$= |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}| = \sqrt{9} = 3u^2$ El volumen es el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$. Nos falta por calcular $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AE} = (1,2,7) - (1,1,1) = (0,1,6)$

Volumen$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 18u^3$

Ahora sabemos que el volumen es igual al área de la base por la altura del paralelepípedo, luego la altura será igual al cociente entre el volumen y el área de la base, altura$= \dfrac{18}{3} = 6u$

Problema 19 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x = & 1+t \\ y = & t \\ z = & -t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = & \lambda \\ y = & 2+2\lambda \\ z = & 0 \end{cases}$$

1. Estudiar la posición relativa de r y s.
2. Hallar la ecuación de una recta que sea perpendicular, simultánemente a r y a s.

Solución:

1.

$$r := \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(1,0,0) \end{cases} \quad s := \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,2,0) \\ P_r(0,2,0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (0,2,0) - (1,0,0) = (-1,2,0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

2. Sea t la perpendicular común, tendremos que el vector director de t es

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i - j + k = (2, -1, 1)$$

Obtenemos r como corte de dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 2, 0) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, 1) \\ P_s(0, 2, 0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y + z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - y - 5z + 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x - y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

Problema 20 Dados los puntos $A(1, -3, 1)$, $B(2, 3, 1)$ y $C(1, 3, -1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano π
3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. El plano π viene determinado, como siempre, por dos vectores y un punto:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 6, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 6, -2) \\ A(1, -3, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \pi : -6x + y + 3z + 6 = 0$$

2. $$d(O,\pi)=\frac{|0\cdot(-6)+0\cdot 1+0\cdot 3+6|}{\sqrt{36+1+9}}=\frac{6}{\sqrt{46}}\ u$$

3. El volumen de un tetraedro es $V=\dfrac{1}{3}\cdot b\cdot h$, donde b es el área de la base y h la altura.

$$b=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}|=|(-12,2,6)|\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b=\sqrt{144+4+36}=2\sqrt{46}\ u^2$$

$$h=d(O,\pi)=\frac{6}{\sqrt{46}}\Longrightarrow\ V=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{46}\cdot\frac{6}{\sqrt{46}}=4\,u^3$$

Problema 21 Sea el plano $\pi: x-2y-z+1=0$
Hallar:

1. El punto simétrico P' de $P(1,3,2)$ y el punto simétrico Q' de $Q(4,0,-1)$ respecto de π.

2. La recta simétrica de la recta que une a los puntos P y Q respecto del plano π.

Solución:

1. Para calcular el punto P' simétrico de P calculamos una recta perpendicular al plano π y que pase por P, sea r dicha recta

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\quad t \\ y=3-\quad 2t \\ z=2-\quad t \end{array}\right.$$

Para calcular el punto de corte de r y π hacemos
$(1+t)-2(3-2t)-(2-t)+1=0\Longrightarrow t=-1\Longrightarrow P''(0,5,3)$
P'' es el punto medio entre P y P', luego

$$P''=\frac{P'+P}{2}\Longrightarrow P'=2P''-P=2(0,5,3)-(1,3,2)=(-1,7,4)$$

Para calcular el punto Q' simétrico de Q calculamos una recta perpendicular al plano π y que pase por Q, sea s dicha recta

$$s:\left\{\begin{array}{lrr} x= & 4+ & t \\ y= & - & 2t \\ z= & -1- & t \end{array}\right.$$

Para calcular el punto de corte de s y π hacemos
$(4+t)-2(-2t)-(-1-t)+1=0 \Longrightarrow t=-1 \Longrightarrow Q''(3,2,0)$
Q'' es el punto medio entre Q y Q', luego

$$Q''=\frac{Q'+Q}{2} \Longrightarrow Q'=2Q''-Q=2(3,2,0)-(4,0,-1)=(2,4,1)$$

2. La recta que buscamos une los puntos P' y Q' y pasa por ambos puntos

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P'Q'}=(3,-3,-3)\\ P'(-1,7,4)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}x= & -1+3t\\ y= & 7-3t\\ z= & 4-3t\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z-4}{-3}$$

Problema 22 1. Determinar el centro y el radio de la circunferencia

$$C: x^2+y^2-4x+2y=0$$

2. Obtener la ecuación de la recta tangente a C en el punto $P(4,0)$

3. Encontrar la ecuación de la circunferencia concéntrica con C que es tangente a la recta de ecuación $s: 2x-y+2=0$.

Solución:

1.

$$\left\{\begin{array}{l}m=-2a=-4\\ n=-2b=2\\ p=a^2+b^2-r^2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=2\\ b=-1\\ r=\sqrt{5}\end{array}\right.$$

La circunferencia tiene de centro $A(2,-1)$ y radio $r=\sqrt{5}$

2. El vector $\overrightarrow{AP}=(2,1)$,y como la recta tangente es perpendicular a él tendrá como vector director $\overrightarrow{u}=(-1,2)$

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=(-1,2)\\ P(4,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=4-t\\ y=2t\end{array}\right. \Longrightarrow 2x+y-8=0$$

3. La circunferencia que buscamos tiene el mismo centro $A(2,-1)$ que la dada, lo único que nos queda por calcular es su radio. Como la recta que nos dan es tangente a la circunferencia, la distacia desde el centro a la recta será el radio que buscamos.

$$d(A,s)=\frac{|2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$$

La ecuación de la circunferencia será

$$(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{49}{5} \Longrightarrow 5x^2+5y^2-20x+10y-24=0$$

Problema 23 Se consideran las cónicas C_1 y C_2, cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

1. Identificar C_1 y C_2.Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad y asíntotas (si existen).

2. Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Solución:

1. $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.
   Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.
   Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
   Podemos concluir:

   - Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
   - Vértices: $(-4, 0)$ $(0, 3)$ $(0, -3)$ $(4, 0)$
   - Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
   - Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.

   $C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.
   Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{16 + 9} = 5$
   Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$
   Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$
   Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0, 0)$ las rectas buscadas serían:

   $$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

   Podemos concluir:

   - Focos: $(-5, 0)$ $(5, 0)$
   - Vértices: $(-4, 0)$ $(4, 0)$
   - Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
   - Asíntotas:
     $$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

2. La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abcisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.
Como pasa por el vértice $(-4, 0), (0, 3), (0, -3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -4 = & & & c \\ 0 = & 9a+ & 3b+ & c \\ 0 = & 9a- & 3b+ & c \end{array}\right. \Longrightarrow c = -4,\ a = \frac{4}{9}\ y\ b = 0 \Longrightarrow x = \frac{4}{9}y^2 - 4$$

Problema 24 1. (1 punto) Calcula el área de un triángulo de vértices $A(1, 1, 2)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(1, -3, 2)$.

2. (1 punto) Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi : x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s : \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y \quad\quad - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Solución:

1.

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, -3); \quad \overrightarrow{AC} = (0, -4, 0)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right|| = |(-12, 0, 0)| = 12$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{12}{2} = 6$$

2. Calculamos la intersección de π y la recta s:

$$s : \left\{\begin{array}{l} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{array}\right. \Longrightarrow 3t+2+t-(-1+t)+6 = 0 \Longrightarrow t = -3 \Longrightarrow P(-9, -1, -4)$$

La recta pedida pasará por este punto y tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u} = (3, 1, 0) \times (4, -3, 1) = \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{array}\right| = (1, -3, -13)$$

La recta pedida es

$$x + 9 = \frac{x + 1}{-3} = \frac{z + 4}{13}$$

Problema 25 1. Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene centro $C(1,4)$ y es tangente a la recta $s: 3x+4y-4=0$

2. Determinar el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0,0), (0,2) y (2,4).

Solución:

1.
$$r = d(C,s) = \frac{|3\cdot 1+4\cdot 4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 3$$
Luego la ecuación buscada es $(x-1)^2+(y-4)^2=9$

2. La ecuación general de una circunferencia es $x^2+y^2+mx+ny+p=0$, y sustituyendo los puntos dados en la ecuación tenemos:
$$\left\{\begin{array}{l} p=0\\ 2n+p+4=0\\ 2m+4n+p+20=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-2a=-6\\ n=-2b=-2\\ p=a^2+b^2-r^2=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=3\\ b=1\\ r=\sqrt{10}\end{array}\right.$$
En conclusión, el centro es $C(3,1)$, el radio $r=\sqrt{10}$ y la ecuación de la circunferencia pedida será $(x-3)^2+(y-1)^2=10$.

Problema 26 1. Calcular la distancia del punto de coordenadas $(1,1,2)$ al plano que pasa por los puntos $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$.

2. Calcular la distancia del punto de coordenadas $P(3,5,0)$ a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(0,1,2)$ y $B(0,1,1)$.

Solución:

1. Vamos a calcular el plano que pasa por los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,1)$. Para ello obtenemos los vectores:
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (1,0,1)-(1,1,0) = (0,-1,1)$$
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (0,1,1)-(1,1,0) = (-1,0,1)$$
El plano vendrá definido por
$$\pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u}=(0,-1,1)\\ \overrightarrow{v}=(-1,0,1)\\ A(1,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow$$
$$\pi: \left|\begin{array}{rrl} 0 & -1 & x-1\\ -1 & 0 & y-1\\ 1 & 1 & z\end{array}\right| = 0 \Longrightarrow\ x+y+z-2=0$$
Ahora calculamos la distancia del punto $P(1,1,2)$ al plano π:
$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_o+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1+1+2-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2. Primero calculamos el vector director de la recta que pasa por los puntos $A(0,1,2)$ y $B(0,1,1)$, para ello calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (0,1,1)-(0,1,2) = (0,0,-1)$, y un vector auxiliar $\overrightarrow{AP} = (3,5,0) - (0,1,2) = (3,4,-2)$. Ahora calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4i - 3j = (4,-3,0)$$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{1}} = 5$$

Problema 27 Compruebe que las rectas

$$r : (x,y,z) = (3,-4,0) + t(2,-3,-2)$$

$$s : (x,y,z) = (-7,1,2) + h(4,-1,0)$$

se cortan en un punto. Halle también la ecuación general del plano que determinan.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-3,-2) \\ P_r = (3,-4,0) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (4,-1,0) \\ P_s = (-7,1,2) \end{array} \right.$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (-7,1,2)-(3,-4,0) = (-10,5,2)$ y tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = 0 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ las dos rectas se cortan.

El plano que determinan estas dos rectas será:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-3,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (4,-1,0) \\ P_r = (3,-4,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 2 & 4 & x-3 \\ -3 & -1 & y+4 \\ -2 & 0 & z \end{vmatrix} = x + 4y - 5z + 13 = 0$$

Problema 28 Dados el plano $\pi : x + y + z = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

1. Hallar la ecuación de una recta s que sea perpendicular a r y pase por P.
2. Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.
3. Hallar el punto P'',simétrico de P respecto de π.

Solución:

1. Hallamos primero la ecuación del plano π' perpendicular a la recta r y que pase por P. Este plano tendrá como vector normal al vector director de la recta $u_r = (0, 1, 1)$.

   La ecuación general de este plano será $y + z + K = 0$, para calcular K particularizamos que este plano contiene al punto $P(1, 1, 0)$, y por simple sustitución tenemos que

   $1 + 0 + k = 0 \Longrightarrow k = -1 \Longrightarrow \pi' : y + z - 1 = 0$

   Ahora tenemos que encontrar el punto de corte de este plano y la recta r, para ello creo que lo más fácil es con la ecuación de la recta en forma paramétrica
   $$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

   Sustituyendo en el plano tendremos $t + t - 1 = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{1}{2}$ el punto que buscamos será por tanto $Q\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

   La recta que queremos obtener pasa por P y por Q:

   $$\begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{QP} = (1, 1, 0) - \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \\ P(1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \dfrac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

2. El punto Q que hemos obtenido será el punto medio entre P y P', y por tanto

   $$Q = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2Q - P = 2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 1, 0) = (1, 0, 1)$$

3. Ahora la recta que une los puntos P y P'' es perpendicular al plano π, y por tanto el vector director de esta recta es el vector normal del plano, llamando t a esta recta podemos ponerlo de la siguiente manera $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_t} = (1,1,1)$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,1,1) \\ P(1,1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\mu \\ y = 1+\mu \\ z = \mu \end{array} \right.$$

Buscamos el punto de corte de esta recta con el plano π, por simple sustitución

$$1+\mu+1+\mu+\mu = 1 \Longrightarrow \mu = -\frac{1}{3}$$

Obtenemos el punto de corte $H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$$H = \frac{P+P''}{2} \Longrightarrow P'' = 2H - P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Problema 29 *(3 puntos)* Dadas las rectas en el espacio:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

1. Hallar la distancia entre las dos rectas.

2. Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.

Solución:

1.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,-2,1) \\ P_r(2,1,0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,-1,2) \\ P_s(-1,-2,1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array} \right| = -3i - 4j + k = (-3,-4,1)$$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,-2,1) - (2,1,0) = (-3,-3,1)$$

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \left| \begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{array} \right| = 22$$

Luego la distancia entre las dos rectas será:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{22}{\sqrt{26}}$$

2.

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,-2,1) \\ \overrightarrow{u} = (-3,-4,1) \\ P_r(2,1,0) \end{array} \right. \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,-1,2) \\ \overrightarrow{u} = (-3,-4,1) \\ P_s(-1,-2,1) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{rrr} 3 & -3 & x-2 \\ -2 & -4 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - 3y - 9z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{rrr} 2 & -3 & x+1 \\ -1 & -4 & y+2 \\ 2 & 1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 7x - 8y - 11z + 2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 9z + 1 = 0 \\ 7x - 8y - 11z + 2 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 30 Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

1. (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

2. (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.

Solución:

1. Datos:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1,3,-1) \quad r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (6,2,1) \\ P_r(-2,1,0) \end{array} \right.$$

$$\pi' : \left| \begin{array}{rrr} 1 & 6 & x+2 \\ 3 & 2 & y-1 \\ -1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : 5x - 7y - 16z + 17 = 0$$

2.

$$s:\begin{cases} x+3y-z-1=0 \\ 5x-7y-16z+17=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+3y=1+z \\ 5x-7y=-17+16z \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x=-2+\dfrac{5}{2}\cdot\lambda \\ \\ y=1-\dfrac{1}{2}\cdot\lambda \\ \\ z=\lambda \end{cases}$$

Problema 31 Discutir la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro a.

$$\begin{cases} \pi_1: & x- & y+ & z= & 0 \\ \pi_2: & & ay+ & 2z= & 4 \\ \pi_3: & & 2y+ & az= & 4 \end{cases}$$

Solución

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 4 \\ 0 & 2 & a & 4 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A|=0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \Longrightarrow |A|=a^2-4=0 \Longrightarrow a=2,\ a=-2$.

Si $a\neq 2$ y $a\neq -2$ tendremos que $|A|\neq 0$ por lo que Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = 3 =nº de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $a=2$ tendremos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Vemos que tiene dos filas iguales, y además $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Por lo que podemos concluir en este caso que Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = 2 <nº incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado. Los planos π_2 y π_3 son coincidentes, y el plano π_1 los corta en una recta.

Si $a = -2$ tendremos:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Primero tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, por lo que $\text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

tenemos que $\text{Rango}(\overline{A}) = 3$

En este caso, por tanto, $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\overline{A}) = 3$. El sistema es Incompatible y para ver la posición de los planos los comparamos dos a dos. Vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos, y el plano π_1 los corta a los dos.

Problema 32 Sea la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{rrl} 2x & + & z = 1 \\ x & +y- & z = 0 \end{array} \right.$$

1. Calcular la ecuación de un plano que sea perpendicular a ella y contenga al punto $P(1, 1, 0)$.
2. Calcular la intersección de este plano y r.
3. Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

Solución:

1.

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 2)$$

$$\pi : -x + 3y + 2z + \lambda = 0$$

Como este plano tiene que contener al punto P, por simple sustitución tenemos: $-1 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$.

$$\pi : -x + 3y + 2z - 2 = 0 \Longrightarrow x - 3y - 2z + 2 = 0$$

2. Pongo r en paramétricas:

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases}$$

y sustituyo en π, $\lambda-3(1-3\lambda)-2(1-2\lambda)=0 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{3}{14}$

Sustituyendo este valor en r tenemos el punto $P'\left(\dfrac{3}{14},\dfrac{5}{14},\dfrac{8}{14}\right)$

3.

$$P'=\frac{P''+P}{2}\Longrightarrow\begin{cases} \dfrac{3}{14}=\dfrac{x+1}{2}\Longrightarrow x=-\dfrac{4}{7} \\[2mm] \dfrac{5}{14}=\dfrac{y+1}{2}\Longrightarrow y=-\dfrac{2}{7} \\[2mm] \dfrac{8}{14}=\dfrac{z}{2}\Longrightarrow z=\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

El punto buscado es $P''\left(-\dfrac{4}{7},-\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{7}\right)$.

Problema 33 Determinar la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} 2x \quad\quad + \; z=1 \\ x \; +y- \; z=0 \end{cases},\quad s:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$$

Solución:
El vector director de la recta r será:

$$\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1,3,2)$$

Un punto de la recta será (haciendo $x=0$) $A_r(0,1,1)$, y tendremos:

$$r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,3,2) \\ A_r(0,1,1) \end{cases},\quad s:\begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(3,1,-1) \\ A_s(1,1,0) \end{cases}$$

Calculamos el vector auxiliar $\overrightarrow{A_rA_s}=(1,0,-1)$

$$|A|=|\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s}|=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=5\neq 0$$

Luego las dos rectas se cruzan.

Problema 34 Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{array} \right. \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{array} \right.$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 35 Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

1. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

2. Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

1. Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 1)$.
   Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (-1, 1, 1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ $z_0 = 2$, el punto será $D(0, 2, 2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| = (0, -2, 2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1,1,1)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 36 Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & x- & 2y+ & 3z & -4=0 \\ \pi_2: & 2x+ & y+ & z & +1=0 \\ \pi_3: & -2x+ & 4y- & 6z & =0 \end{array}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & 3z & -4=0 \\ 2x+ & y+ & z & +1=0 \\ -2x+ & 4y- & 6z & =0 \end{array}\right.$$

Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Pero podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}A = 2$

Calculamos ahora el rango de $\overline{A}$, calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -40 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3.$$

En conclusión Rango$A = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3$ y tendremos que compararlos dos a dos; comparamos π_1 y π_3:

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-4}{0}$$

Esto quiere decir que π_1 y π_3 son paralelos, y por tanto, π_2 corta a los dos.

Problema 37 Dadas las rectas

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 2y+ & z = & -1 \end{array} \right.$$

estudiar su posición en el espacio y calcular el ángulo que forman.

Solución:

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -i - 3j - 4k = (-1, -3, -4)$$

Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow P_s(0, 0, -1)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \\ P_r(3, 2, 1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -3, -4) \\ P_s(0, 0, -1) \end{array} \right.$$

Tomamos el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_rP_s} = (-3, -2, -2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que Rango$A = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3 \Longrightarrow$ Las dos rectas se cruzan.

El ángulo que forman las dos rectas vendrá dado por

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-2-3-8|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+9+16}} = \frac{13}{3\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$$\cos\alpha = 0,8498365855 \Longrightarrow \alpha = 31,80610002^{\text{o}}$$

Problema 38 Discute la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro m.

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & x- & y & = & 1 \\ \pi_2: & 2x+ & 3y & -5z = & -16 \\ \pi_3: & x+ & my & -z = & 0 \end{array}\right.$$

Solución

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \Longrightarrow |A| = 5m = 0 \Longrightarrow m = 0$.

Si $m \neq 0$ tendremos que $|A| = 0$ por lo que Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3$ =n$^{\text{o}}$ de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $m = 0$ tendremos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Si calculamos

$$\left|\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -16 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right| = 13 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Además vemos que $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$. Por lo que podemos concluir en este caso que Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema es Incompatible.

Comparamos los planos dos a dos y tenemos:

π_1 y π_2 se cortan.
π_1 y π_3 se cortan.
π_2 y π_3 se cortan.
Se cortan los tres planos dos a dos.

Problema 39 Dadas las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y & +2z = & 1 \\ 2x+ & y & = & -1 \end{array} \right.$$

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Calcular:

1. La posición relativa de ambas.

2. Un plano π que contenga a r y sea paralelo a s.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right| = -2i + 4j + 3k = (-2, 4, 3)$$

Para encontrar un punto de la recta r hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow y = -1, \; z = 0 \Longrightarrow P_r(0, -1, 0)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 4, 3) \\ P_r(0, -1, 0) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1) \\ P_s(1, -1, 1) \end{array} \right.$$

1. Tomamos el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_r P_s} = (1, 0, 1)$

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

   Tenemos que Rango$A = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3 \Longrightarrow$ Las dos rectas se cruzan.

2.

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 4, 3) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1) \\ P_r(0, -1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{rrc} -2 & 2 & x \\ 4 & 1 & y+1 \\ 5 & -1 & z \end{array} \right| = 9x - 8y + 10z - 8 = 0$$

Problema 40 Dada la recta $r : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ y el plano $\pi : 3x + y - z - 1 = 0$. Se pide:

1. Comprobar que posición ocupa esta recta respecto a este plano.

2. En caso de corte, calcular el ángulo que ocupan.

3. Calcular la proyección ortogonal de esta recta sobre el plano.

Solución:

1. Ponemos la ecuación de la recta como intersección de dos plano:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}\Longrightarrow x+y-1=0$$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{z-1}{2}\Longrightarrow 2x+z-3=0$$

$$r:\left\{\begin{array}{llll} x+ & y & & -1=0\\ 2x+ & & +z & -3=0 \end{array}\right. \quad \pi: 3x+y-z-1=0$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Como $|A|=4\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(A)=3\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, es decir, se cortan en un punto.

2.

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,2)\\ P_r(1,0,1) \end{array}\right. \quad \pi:\overrightarrow{u_\pi}=(3,1,-1)$$

$$\sin\alpha=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}=\frac{-4}{\sqrt{66}}\Longrightarrow \alpha=-29.49620849^{\text{o}}$$

3. Se obtiene como intersección de dos planos, el plano dado π y el plano definido por:

$$\pi':\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,2)\\ \overrightarrow{u_\pi}=(3,1,-1)\\ P_r(1,0,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{rrc} -1 & 3 & x-1\\ 1 & 1 & y\\ 2 & -1 & z-1 \end{array}\right|=3x-5y+4z-7=0$$

La proyección ortogonal será:

$$s:\left\{\begin{array}{llll} 3x- & 5y+ & 4z- & 7=0\\ 3x+ & y- & z- & 7=0 \end{array}\right.$$

Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ A(1,-1,0) \end{array}\right. \qquad \pi:\overrightarrow{u_\pi}=(2,1,-1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ \overrightarrow{u_\pi}=(2,1,-1)\\ A(1,-1,0) \end{array}\right.$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 41 Encontrar la recta que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$ y corta a las rectas r y s de ecuaciones

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y- & z+ & 1 = 0 \\ 2x- & y+ & z+ & 4 = 0 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{lr} x = & 3+t \\ y = & t \\ z = & 1+t \end{array} \right.$$

Determinar la posición que ocupan las dos rectas.

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -5, -7) \\ P_r(0, -5, -9) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1) \\ P_s(3, 0, 1) \end{array} \right.$$

Donde hemos calculado

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -5, -7)$$

Si hacemos $x = 0$ obtenemos $P_r(0, -5, -9)$.

Para determinar la posición que ocupan necesitamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s} = (3, 5, 10)$ y tenemos que

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\overline{A}| = 54 \neq 0$$

Tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Ahora tenemos que calcular:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -5, -7) \\ \overrightarrow{PP_r} = (0, -5, -9) \\ P(1, 0, 1) \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{PP_s} = (2, 0, 2) \\ P(1, 0, 1) \end{array} \right.$$

Obtenemos:

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -5 & -5 & y \\ -7 & -8 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 3y - 2z - 3 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - z - 2 = 0$$

La recta que buscamos será

$$t : \left\{ \begin{array}{rrrr} x & +3y- & 2z- & 3 = 0 \\ x & - & z- & 2 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 42 Encontrar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P(1,2,1)$ y $Q(1,2,3)$, y al punto intersección de la recta r y el plano π cuyas ecuaciones son:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{array} \right. \qquad \pi : x + y + z = 0$$

Solución: El punto de intersección que buscamos será:

$$(1+2t) + (2+2t) + (1-2t) = 0 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow S(-3,-2,5)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1,2,3) - (1,2,1) = (0,0,2) \\ \overrightarrow{PS} = (-3,-2,5)_(1,2,1) = (-4,-4,2) \\ P(1,2,1) \end{array} \right.$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 0 & -4 & x-1 \\ 0 & -4 & y-2 \\ 2 & 4 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - y + 1 = 0$$

Problema 43 Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π de ecuaciones

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrr} 2x- & y+ & & +2 = 0 \\ x+ & y+ & z & -1 = 0 \end{array} \right. \qquad \pi : x + y - z + 1 = 0$$

y calcular la proyección ortogonal de r sobre π.
Solución: Sean las matrices A y $\overline{A}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -6 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ la recta r y el plano π se cortan.

La proyección ortogonal de r sobre π será la recta t, que vendrá determinada por la recta intersección del plano π y otro plano π' perpendicular a él que contenga a la recta r, esto es

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1,-2,3) \\ P_r(0,2,-1) \end{array} \right.$$

Donde

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 3)$$

Si $x = 0$ obtenemos que $P_r(0, 2, -1)$. Por tanto:

$$\pi' : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & -2 & y-2 \\ -1 & 3 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - 2y - z + 3 = 0$$

La recta t que buscamos tendrá de ecuación:

$$t : \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & 2y- & z+ & 3 = 0 \\ x+ & y- & z+ & 1 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 44 *(3 puntos)* Se considera r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right.$ y el plano $\pi : x + y + z - 1 = 0$.

1. Determinar las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta y cuya distancia al plano π sea igual que su distancia al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto?. Contestar razonadamente.

2. Calcular la distancia de $Q(1, 1, 1)$ a r y a π.

Solución:

1. Un punto cualquiera de r es dela forma $P(2t, t, 0)$, tendremos

$$d(P, \pi) = \frac{|2t + t - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|3t - 1|}{\sqrt{3}}$$

$$d(P, O) = \sqrt{(2t)^2 + t^2} = t\sqrt{5}$$

Como estas dos distancias son iguales, $d(P, \pi) = d(P, O)$ tendremos:

$$\frac{|3t - 1|}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5}$$

Como tenemos un valor absoluto, esta ecuación tiene dos soluciones:

$$\frac{3t - 1}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5} \Longrightarrow t = \frac{1}{3 - \sqrt{15}}$$

$$\frac{3t - 1}{\sqrt{3}} = -t\sqrt{5} \Longrightarrow t = \frac{1}{3 + \sqrt{15}}$$

Sustituyendo en P tenemos los puntos

$$\left(\frac{2}{3 - \sqrt{15}}, \frac{1}{3 - \sqrt{15}}, 0 \right) \quad \left(\frac{2}{3 + \sqrt{15}}, \frac{1}{3 + \sqrt{15}}, 0 \right)$$

2. Tenemos

$$d(Q,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Para calcular calcular $d(Q,r)$ consideramos los datos de la recta r : $\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(2,1,0)\\ P_r(0,0,0)\end{cases}$ construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rQ}=(1,1,1)$ y calculamos

$$\overrightarrow{P_rQ}\times\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,2,-1)$$

Tenemos por tanto

$$d(Q,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rQ}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6}{5}}$$

Problema 45 *(3 puntos)* Se consideran las rectas r_1 y r_2 dadas por

$$r_1:\begin{cases} x+\ \ y-\ 2z=0\\ 2x-\ 3y+\ \ z=1\end{cases}\quad r_2:\begin{cases} x= & 3t\\ y= & 1-\ 2t\\ z= & 2+\ \ t\end{cases}$$

Encontrar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto de intersección de r_2 con el plano $\pi: x-3y-2z+7=0$

Solución:
El punto de intersección que buscamos será:

$$3t-3(1-2t)-2(2+t)+7=0\Longrightarrow t=0\Longrightarrow Q(0,1,2)$$

Los datos de r_1 serán los siguientes

$$\overrightarrow{u_{r_1}}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=(-5,-5,-5)$$

Si hacemos $x=0$ obtenemos el punto $P_{r_1}\left(0,-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$

$$\pi:\begin{cases}\overrightarrow{u_{r_1}}=(-5,-5,-5)\\ \overrightarrow{QP_{r_1}}=\left(0,-\frac{7}{5},-\frac{11}{5}\right)\\ Q(0,1,2)\end{cases}$$

$$\pi:\begin{vmatrix} -5 & 0 & x\\ -5 & -\frac{7}{5} & y-1\\ -5 & -\frac{11}{5} & z-2\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 4x-11y+7z-3=0$$

Problema 46 *(4 puntos)* Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \alpha + t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{\alpha} = \frac{z-1}{-1}$$

1. Estudiar su posición relativa en función de α.
2. Si $\alpha = -1$, encontrar un plano paralelo a r y que contenga a s.

Solución:

1. Los datos que tenemos de r y s son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, \alpha, 2) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, \alpha, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

Construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_sP_r} = (0, \alpha, 1)$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\overline{A}| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan independientemente del valor de α.

2. Cuando $\alpha = -1$ tenemos

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, 2) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

El plano π que buscamos vendrá definido por

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, -1, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ 1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y - z + 1 = 0$$

Problema 47 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x = & 2- & 3t \\ y = & & t \\ z = & 1- & t \end{cases}, \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

Calcular:

1. su posición relativa y la distancia que las separa.
2. la recta que es perpendicular a ambas.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-3, 1, -1) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases}$$

Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_sP_r} = (1, -2, 1)$, y tenemos

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\overline{A}| = -2 \neq 0$$

En conclusión Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$ Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_sP_r}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$

$$|[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}| = |-2| = 2$$

Calculamos $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2j + 2k = (0, 2, 2) \Longrightarrow |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = 2\sqrt{2}$$

Tenemos, por tanto

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Obtenemos t, la recta perpendicular a r y a s, como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (0, 2, 2)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-3, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (0, 2, 2) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & x-2 \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x+3y-3z-1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_t} = (0,2,2) \\ P_s(1,2,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y-2 \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x+y-z-4=0$$

$$t : \begin{cases} 2x+ & 3y- & 3z- & 1=0 \\ 2x+ & y- & z- & 4=0 \end{cases}$$

Problema 48 Determine los puntos de la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ que equidistan de los planos $\pi_1 : 3x+4y=1$ y $\pi_2 : 4x-3z=1$.

Solución:
Un punto genérico de la recta sería $P(1+2t, -1+3t, -2+2t)$

$$d(P,\pi_1) = \frac{|3(1+2t)+4(-1+3t)-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-2+18t|}{5}$$

$$d(P,\pi_2) = \frac{|4(1+2t)-3(-2+2t)-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|9+2t|}{5}$$

$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Longrightarrow \begin{cases} -2+18t = 9+2t \Longrightarrow t = \dfrac{11}{16} \\ \\ -2+18t = -(9+2t) \Longrightarrow t = -\dfrac{7}{20} \end{cases}$$

Tendríamos dos puntos:

$$P_1\left(\frac{19}{8}, \frac{17}{6}, -\frac{5}{8}\right), \quad P_2\left(\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10}\right)$$

Problema 49 Dados los puntos $A(2,3,-1)$, $B(3,3,2)$ y $C(1,4,3)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Calcular la distancia de este plano al origen de coordenadas.
3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. Determinamos

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,3), \quad \overrightarrow{AC} = (-1,1,4)$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,0,3) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,1,4) \\ A(2,3,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 1 & y-3 \\ 3 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 3x+7y-z-28=0$$

2.

$$d(O,\pi)=\frac{|-28|}{\sqrt{9+49+1}}=\frac{28\sqrt{59}}{59}=3,645289507\,u$$

3.

$$V=\frac{1}{3}(\text{área base})\cdot\text{altura}=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]|$$

$$\overrightarrow{OA}=(2,3,-1),\ \ \overrightarrow{OB}=(3,3,2),\ \ \overrightarrow{OC}=(1,4,3)$$

$$V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{rrr} 2 & 3 & -1\\ 3 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{array}\right||=\frac{1}{6}|-28|=\frac{14}{3}=4,666\,u^3$$

Problema 50 Se considera la recta

$$r:\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y & -z- & 1=0\\ x+ & y & - & 1=0\end{array}\right.$$

Se pide:

1. Determinar la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por $(0,2,2)$, y las coordenadas del punto P intersección de r y s.
2. Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y s, y la de la recta t perpendicular a π por el punto P.
3. Si Q es un punto cualquiera de t, sin hacer ningún cálculo, que relación hay entre las distancias de Q a r, de Q a s y de Q a π.

Solución:

1. Para calcular $\overrightarrow{u_r}$ tenemos:

$$\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right|=(1,-1,1)$$

Haciendo $x=0$ obtenemos $P_r(0,1,1)$ y tendremos

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-1,1)\\ P_r(0,1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{rr} x= & \lambda\\ y= & 1-\lambda\\ z= & 1+\lambda\end{array}\right.$$

Un plano perpendicular a r sería $\pi':x-y+z+\lambda=0$ que por contener al punto $(0,2,2)\Longrightarrow -2+2+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=0\Longrightarrow\pi':x-y+z=0$

Buscamos el punto de intersección entre el plano π' y la recta r. Sustituimos r en π'

$$\lambda - (1-\lambda) + (1+\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P(0,1,1)$$

La recta s pasa por $P(0,1,1)$ y por $P_s(0,2,2)$:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_s} = (0,1,1) \\ P(0,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{ll} x = 0 & \\ y = 1 & +\lambda \\ z = 1 & +\lambda \end{array} \right.$$

2. Tenemos que π tiene que contener a r y s, y tenemos que

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r(0,1,1) \end{array} \right. \quad , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (0,1,1) \\ P_s(0,1,1) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x + y - z = 0$$

La recta t es perpendicular π y pasa por el punto $P = P_r = P_s$, luego

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1) \\ P_t(0,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow t = \left\{ \begin{array}{lll} x = & & 2\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & \lambda \end{array} \right.$$

3. La recta t es perpendicular a r, a s y a π, además los tres se cortan en el punto P, luego si Q es un punto cualquiera de t, tendremos

$$d(Q,r) = d(Q,s) = d(Q,\pi)$$

Problema 51 Sea la ecuación de la recta r determinada por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(1,-1,-1)$; y sea la recta $s : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$.

Se pide:

1. Averiguar su posición relativa.
2. La distancia que las separa.
3. Perpendicular común a ambas rectas.
4. Hallar, si existe, una recta que pase por el punto $C(1,2,4)$ y que corte a r y a s.

Solución:

1.

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u_r}=(0,-1,0)\\ P_r(1,0,-1)\end{cases}\quad , \quad s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(2,5,3)\\ P_s(3,0,0)\end{cases}$$

Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s}=(2,0,1)$, y tenemos

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&5&3\\2&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow|\overline{A}|=-4\neq 0$$

En conclusión Rango$(\overline{A})=3\neq$ Rango$(A)=2\Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

2. Calculamos $|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|$

$$\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}i&j&k\\0&-1&0\\2&5&3\end{vmatrix}=-3i+2k=(-3,0,2)\Longrightarrow|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=\sqrt{13}$$

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|=|\begin{vmatrix}0&-1&0\\2&5&3\\2&0&1\end{vmatrix}|=|-4|=4$$

Tenemos, por tanto

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{4}{\sqrt{13}}=\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

3. Obtenemos t, la recta perpendicular a r y a s, como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=(-3,0,2)$$

$$\pi_1:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(0,-1,0)\\ \overrightarrow{u_t}=(-3,0,2)\\ P_r(1,0,-1)\end{cases}\Longrightarrow\begin{vmatrix}-3&0&x-1\\0&-1&y\\2&0&z+1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 2x-3z-1=0$$

$$\pi_2:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(2,5,3)\\ \overrightarrow{u_t}=(-3,0,2)\\ P_s(3,0,0)\end{cases}\Longrightarrow\begin{vmatrix}-3&2&x-3\\0&5&y\\1&2&z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 10x-13y+15z-30=0$$

$$t:\begin{cases}2x&&-&3z-&1=0\\10x&-13y+&&15z-&30=0\end{cases}$$

4. Obtenemos h, la recta que corta a r y a s y pasa por $C(1,2,4)$, como intersección de dos planos.

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0,-1,0) \\ \overrightarrow{P_rC} = (0,2,5) \\ P_r(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{rrc} 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 5 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x-1=0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,5,3) \\ \overrightarrow{P_sC} = (-2,2,4) \\ P_s(3,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{lrc} 2 & -2 & x-3 \\ 5 & 2 & y \\ 3 & 4 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x-y+z-3=0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x-1=0 \\ x-y+z-3=0 \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{lrr} x = & 1 & \\ y = & -2 & +\lambda \\ z = & & \lambda \end{array} \right.$$

Problema 52 Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(2,1,3)$ y $C(-1,2,-1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y el origen de coordenadas O.
3. Calcular la altura del tetraedro que va desde el origen de coordenadas a la cara de vértices ABC.
4. Calcular la altura del triángulo OAB, la que va desde el vétice O al segmento $\overline{AB}$.

Solución:

1. Determinamos

$$\overrightarrow{AB} = (0,0,2), \ \ \overrightarrow{AC} = (-3,1,-2)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,0,2) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,1,-2) \\ A(2,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{lrc} 0 & -3 & x-2 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 2 & -2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x+3y-5=0$$

2.

$$V = \frac{1}{3}(\text{área base}) \cdot \text{altura} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$$

$$\overrightarrow{OA} = (2,1,1), \ \ \overrightarrow{OB} = (2,1,3), \ \ \overrightarrow{OC} = (-1,2,-1)$$

$$V = \frac{1}{6}| \left| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right| | = \frac{1}{6}|-10| = \frac{5}{3} = 1,666\, u^3$$

3. Área de la base$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 0 & 2\\ -3 & 1 & -2\end{vmatrix}=(-2,-6,0)\Longrightarrow \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{10}$$

$$V=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\cdot h\Longrightarrow h=\frac{\sqrt{10}}{2}=1,58113883\,u$$

$$d(O,\pi)=\frac{|-5|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}=1,58113883\,u$$

4. LLamo r a la recta que une AB:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(0,0,2)\\ P_r=A(2,1,1)\end{array}\right.$$

Obtenemos el vector auxiliar $\overrightarrow{OA}=(2,1,1)$ y hacemos

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-2,4,0)$$

$$d(O,r)=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}\,u$$

Problema 53 Consideramos el punto $P(5,-2,9)$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{6}$.

Calcular:

1. Distancia de P a r.
2. Ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y que pasa por P
3. Calcular el punto de corte T entre las rectas r y s.

Solución:

1.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,-3,6)\\ P_r(1,-1,0)\end{array}\right. ,\quad \overrightarrow{P_rP}=(4,-1,9)$$

$$\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = (-21, 14, 42)$$

$$|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}| = \sqrt{(-21)^2 + 14^2 + 42^2} = 49, \quad |\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{4+9+36} = 7$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{49}{7} = 7$$

2. Ponemos la recta r en paramétricas $\left\{ \begin{array}{rrr} x = & 1- & 2t \\ y = & -1- & 3t \\ z = & & 6t \end{array} \right.$.

   Luego el punto T de s y de r será en forma genérica $T(1-2t, -1-3t, 6t)$.

   El vector $\overrightarrow{PT} = (-4-2t, 1-3t, -9+6t)$ es perpendicular $\overrightarrow{u_r}$ y, por tanto, el producto escalar de ambos será cero

   $$\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{u_s} = (6, 2, 3)$$

   La recta que buscamos es

   $$s : \frac{x-5}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-9}{3}$$

3. Por el apartado anterior tenemos $T(-1, -4, 6)$

Problema 54 Sabemos que las siguientes rectas se cortan en un punto. Hallar el valor de k y la ecuación en forma general del plano que determinan.

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+k}{3} = \frac{z-1}{-2}$$

$$s : \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-k}{3}$$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, -2) \\ P_r(-1, -k, 1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 2, 3) \\ P_s(0, -3, k) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (1, -3+k, k-1)$$

Tenemos

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & +k \end{pmatrix} \Longrightarrow |\overline{A}| = -7k + 36 = 0 \Longrightarrow k = \frac{36}{7}$$

Si $k \neq \dfrac{36}{7} \Longrightarrow$ Rango$\overline{A} = 3 \neq$Rango$(A) = 2$, y en este caso las rectas se cruzan.

Si $k = \dfrac{36}{7} \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 2 = \text{Rango}(A)$, y en este caso las rectas se cortan.

En este último caso, el plano que las contiene será:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,3,-2) \\ P_s(0,-3,36/7) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y+3 \\ 3 & -2 & z-36/7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi : 91x - 56y + z + 204 = 0$$

Problema 55 Sea el plano $\pi : x - 2y + 4z = 12$ y el punto $P(2,-1,1)$.

1. Calcular la distancia $d(P,\pi)$.
2. Hallar la ecuación de un plano paralelo a π y distinto del mismo, que también diste de P la misma distancia d.
3. Calcular el volumen de la figura limitada por el plano π y los tres planos coordenados.

Solución

1.

$$d(P,\pi) = \frac{2-2(-1)+4\cdot 1-12}{\sqrt{1+4+16}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

2.

$$\pi' : x - 2y + 4z + \lambda = 0$$

$$d(P,\pi') = \frac{|2+2+4+\lambda|}{\sqrt{21}} = \frac{|8+\lambda|}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \Longrightarrow |8+\lambda| = 4$$

$$8+\lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = -4 \Longrightarrow \pi' : x - 2y + 4z - 4 = 0$$

Cuando tomamos $8+\lambda = -4 \Longrightarrow \lambda = -12$ que es el plano π.

3. Corte del plano π con el eje OX:
Hacemos $y = 0$ y $z = 0$, obtenemos el punto $A(12,0,0)$.

Corte del plano π con el eje OY:
Hacemos $x = 0$ y $z = 0$, obtenemos el punto $B(0,-6,0)$.

Corte del plano π con el eje OZ:
Hacemos $x = 0$ y $y = 0$, obtenemos el punto $C(0,0,3)$.

$$\overrightarrow{OA} = (12,0,0),\ \ \overrightarrow{OB} = (0,-6,0),\ \ \overrightarrow{OC} = (0,0,3)$$

$$[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]=\begin{vmatrix} 12 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=-216$$

$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]|=\frac{216}{6}=36\,u^2$$

Problema 56 Dadas las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{lrr} x= & 1- & t\\ y= & & t\\ z= & - & t\end{array}\right.,\quad s:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$$

Calcular:

1. su posición relativa y la distancia que las separa.
2. la recta que es perpendicular a ambas.

Solución:

1.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-1)\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right.\quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,1,1)\\ P_s(-1,1,0)\end{array}\right.$$

Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s}=(-2,1,0)$, y tenemos

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow|\overline{A}|=-5\neq 0$$

En conclusión Rango$(\overline{A})=3\neq$ Rango$(A)=2\Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|=|\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}|=|-5|=5$$

Calculamos $|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|$

$$\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=2i-j-3k=(2,-1,-3)\Longrightarrow|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=\sqrt{14}$$

Tenemos, por tanto

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{5}{\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{14}}{14}$$

2. Obtenemos t, la recta perpendicular a r y a s, como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (2, -1, -3)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, -3) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x+5y+z-4 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_t} = (2, -1, -3) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & x+1 \\ 1 & -1 & y-1 \\ 1 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x-4y+2z+5 = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x+ \ 5y+ \ \ z- \ 4 = 0 \\ x- \ 4y+ \ 2z+ \ 5 = 0 \end{cases}$$

Problema 57 1. Calcula el área de un triángulo de vértices $A(3, 1, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(4, 1, -1)$.

2. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi : x - y - z - 1 = 0$ con la recta $s : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = z$ y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 2x - y \qquad + 2 = 0 \\ 3x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución:

1.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1); \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} | = |(1, -2, 1)| = \sqrt{6}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

2. Calculamos la intersección de π y la recta s:

$$s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \Longrightarrow 2t-(1+2t)-t-1 = 0 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow P(-4, -3, -2)$$

La recta pedida pasará por este punto y tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u} = (2, -1, 0) \times (3, 1, 1) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 5)$$

La recta pedida es

$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{5}$$

Problema 58 Discutir la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro a.

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} \pi_1: & -x+ & 2y+ & z= & 0\\ \pi_2: & & ay+ & 4z= & 8\\ \pi_3: & & 4y+ & az= & 8 \end{array}\right.$$

Solución

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & a & 4 & 8\\ 0 & 4 & a & 8 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A|=0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A\Longrightarrow |A|=-(a^2-16)=0\Longrightarrow a=4,\ \ a=-4.$

Si $a\neq 4$ y $a\neq -4$ tendremos que $|A|\neq 0$ por lo que Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3$ =n$^{\text{o}}$ de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $a=4$ tendremos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 4 & 8\\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

Vemos que tiene dos filas iguales, y además $\left|\begin{array}{rr} -1 & 2\\ 0 & 4 \end{array}\right|=-4\neq 0$. Por lo que podemos concluir en este caso que Rango(A) =Rango$(\overline{A})=2<$n$^{\text{o}}$ incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado. Los planos π_2 y π_3 son coincidentes, y el plano π_1 los corta en una recta.

Si $a=-4$ tendremos:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 4 & 8\\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

Primero tenemos que $\left|\begin{array}{rr} -1 & 2\\ 0 & -4 \end{array}\right|=4\neq 0$, por lo que Rango$(A)=2$.

Como

$$\left|\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 0\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right|=64\neq 0$$

tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3$

En este caso, por tanto, Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$. El sistema es Incompatible y para ver la posición de los planos los comparamos dos a dos. Vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos, y el plano π_1 los corta a los dos.

Problema 59 Dados los puntos $A(1,2,-1)$, $B(3,4,2)$ y $C(1,3,1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Calcular la distancia de este plano al origen de coordenadas.
3. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y el origen de coordenadas.

Solución:

1. Determinamos
$$\overrightarrow{AB} = (2,2,3),\ \ \overrightarrow{AC} = (0,1,2)$$
$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,2,3) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,2) \\ A(1,2,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 2 & 0 & x-1 \\ 2 & 1 & y-2 \\ 3 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$
$$\pi : x - 4y + 2z + 9 = 0$$

2.
$$d(O,\pi) = \frac{|9|}{\sqrt{1+16+4}} = \frac{9\sqrt{21}}{21} = 1,963961012\, u$$

3.
$$V = \frac{1}{3}(\text{área base}) \cdot \text{altura} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$$
$$\overrightarrow{OA} = (1,2,-1),\ \ \overrightarrow{OB} = (3,4,2),\ \ \overrightarrow{OC} = (1,3,1)$$
$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|-9| = \frac{3}{2} = 1,5\, u^3$$